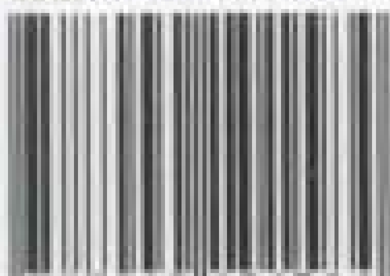
差分方程的振动理论

张广　高英　编著



高等教育出版社

ISBN 7-04-010158-0



定价 18.30 元

差分方程的振动理论

张广　高英　编著



高等教育出版社

本书作为一本专门著作，系统而全面地总结了差分方程振动性的理论、方法和最新进展。内容由浅入深，由时滞差分方程到中立型差分方程，由低阶差分方程到高阶差分方程，由常差分方程到偏差分方程。本书既可供相关研究人员作参考书，也可供大学数学专业、应用数学专业高年级学生和研究生作为相关课程的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

差分方程的振动理论/张广，高英编著.—北京：高等教育出版社，2001.12
ISBN 7-04-010158-0

Ⅰ.差... Ⅱ.①张...②高... Ⅲ.差分方程-振动理论 Ⅳ.O241.3

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第066182号

差分方程的振动理论
张广　高英　编著

出版发行	高等教育出版社		
社　址	北京市东城区沙滩后街55号	邮政编码	100009
电　话	010-64054588	传　真	010-64014048
网　址	http://www.hep.edu.cn http://www.hep.com.cn		
经　销	新华书店北京发行所		
印　刷	国防工业出版社印刷厂		
开　本	850×1168　1/32	版　次	2001年12月第1版
印　张	11.625	印　次	2001年12月第1次印刷
字　数	300 000	定　价	18.30元

前　言

微分方程或泛函微分方程振动理论在定性理论中占据着十分重要的位置，近年来已有多本专著对此进行了论述，例如文献[1－7]．作为古老而又年轻的差分方程的振动理论在定性理论中同样具有重要意义．自20世纪80年代人们在差分方程中引入泛函微分方程的方法以来，它得到了快速发展，有关论文数以百计．但是，这方面的专门著作却尚未见到．本书的目的就是介绍近年来国内外学者在差分方程振动理论方面的新的研究成果，当然其中也包括了作者在这方面的一些工作．

全书共分八章．在第一章中，先给出了一些与本书有直接关系的基本概念，这些基本概念在一般的书中可以找到，它们的证明将省略．从第二章开始，则分类讨论各种类型差分方程的振动性．第二章讨论一阶时滞差分方程，第三章则考虑一阶中立型差分方程．第四章考察了二阶方程，第五章着重研究二阶中立型差分方程，第六章将研究高阶差分方程．另外，偏差分方程和具有连续变量的差分方程的振动性工作近几年也有一定发展，因此在第七章我们总结了偏差分方程的内容，而在第八章研究了具有连续变量的差分方程和偏差分方程．此外，我们也在有关章节中讨论了含有最大值的差分方程，这类方程在控制论中具有广泛的应用．对本书的出版，雁北师院马晋宜院长给予了大力支持，同时大同职业技术学院和雁北师院的领导及有关同志对本书的出版也给予了很大的帮助与关心，这里一并表示感谢．

北方工业大学韩效宥教授，山西大学燕居让教授和青岛海洋大学张柄根教授对本书的第一作者给予了长期教诲，本书的完成也得益于同台湾清华大学郑穗生教授的长期合作．同时，郑穗生教授提供了本书的大部分参考资料，也对本书的第一作者给予了长期的资助，

这里深表谢意.

燕居让教授和郑穗生教授阅读了本书的初稿,提出了一些建设性意见,中国科学院应用数学研究所的俞元洪研究员和北京理工大学葛渭高教授在详细阅读了该书的初稿后提出了一些有意义的建议,在此表示诚挚的谢意。作者的初衷是在介绍近年来本方向研究新成果的同时,较为系统的整理差分方程的振动性结果.但由于新的结果层出不穷,文献难免挂一漏十,再加上作者水平的局限,倘有谬误,热忱欢迎识者不吝指正.

张广 高英

2000年6月于大同

目　录

第一章 差分方程的基本概念与方法

在本章中,将简要介绍差分方程最基本的一些概念,这些基本概念是讨论问题的出发点.由于篇幅关系,这里只提及与讨论问题有关的内容,较详细的叙述可在一般差分方程的著作中找到.

§1.1 基本概念

一个差分方程其实就是一个递推数列

$$x_{n+k}=F(n,x_{n+k-1},\cdots,x_n),\tag{1.1.1}$$

其中 k 是一个正整数,$n=0,1,2,\cdots$,$F\in(\mathbf{N}\times\mathbf{R}^k,\mathbf{R})$且对于固定的 n 来说是一个连续函数.

方程(1.1.1)被称做是一个 k 阶差分方程,这是因为(1.1.1)中的最大足码 $n+k$ 与最小足码 n 的差为 k.(1.1.1)的一个解是指一个数列$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$且当 $n\geqslant k$ 时满足方程(1.1.1).由于方程(1.1.1)是一个递推数列,显然,如果给定初始条件$\{\varphi_n\}_{n=0}^{k-1}$,我们可依次计算出 $x_k,x_{k+1},\cdots$.

如果存在某一常数 $\bar{x}$ 使得

$$\bar{x}=F(n,\bar{x},\cdots,\bar{x})$$

对所有的 $n\in\mathbf{N}$ 上式成立,则称 $\bar{x}$ 是(1.1.1)的一个平衡点.如果方程的一个解$\{x_n\}$满足$\{x_n-\bar{x}\}$既不是最终正的,也不是最终负的,我们称其解$\{x_n\}$关于平衡点 $\bar{x}$ 是振动的.对于数列$\{x_n\}$如果有 N 使得 $n\geqslant N$ 时 $x_n>0$,则称$\{x_n\}$是最终正的;最终负的可类似定义.现在对于方程(1.1.1)做变换 $y_n=x_n-\bar{x}$,它可以变为

$$y_{n+k}=G(n,y_{n+k-1},\cdots,y_n).\tag{1.1.2}$$

这时,如果(1.1.1)有平衡点 $\bar{x}$,则(1.1.2)就有平衡点零.(1.1.1)关于平衡点 $\bar{x}$ 的振动也变为(1.1.2)关于平衡点零的振动.因此,本书中如无特别声明均指关于零点振动.另一方面,我们也假定零是方程(1.1.2)的唯一平衡点.

这样一来,对于方程(1.1.2)的一个解 $\{y_n\}$,如果有 N 存在,使得 $n \geqslant N$ 时 $y_n > 0$,则称 $\{y_n\}$ 是方程(1.1.2)的一个最终正解;同样,最终负解是指存在 N,当 $n \geqslant N$ 时 $y_n < 0$.如果解 $\{y_n\}$ 既不是最终正解也不是最终负解,则称其为振动解.如果方程(1.1.2)的所有解振动,则称方程(1.1.2)是振动的.类似地,如果(1.1.2)的所有解是非振动的,则称方程(1.1.2)非振动.

Δ 是一个差分算子,它在差分表达式中随时可见,其含义为

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n, \quad \Delta^k = \Delta(\Delta^{k-1}).$$

由于我们要讨论的是振动问题,因此本书所指的解均为正则解.所谓正则解是指方程的一个解 $\{y_n\}$ 对任意大的 N_y,有 $\sup\limits_{n \geqslant N_y} |y_n| > 0$.方程

$$\Delta x_n + p_n x_{n-k} = 0 \tag{1.1.3}$$

中 $k \in \mathbf{N}$.它显然是一个 $k+1$ 阶差分方程,这由上面的定义显知.但实际上往往称方程(1.1.3)为一阶时滞差分方程,这一说法主要来源于泛函微分方程.人们总是把方程(1.1.3)看成是一阶时滞微分方程

$$x'(t) + p(t)x(t-\tau) = 0$$

的离散形式.类似地,方程

$$\Delta^m x_n + p_n x_{n-k} = 0$$

叫做 m 阶时滞差分方程,方程

$$\Delta(x_n - p_n x_{n-k}) + q_n x_{n-l} = 0 \tag{1.1.4}$$

叫做一阶中立型时滞差分方程或一阶中立型差分方程.

方程(1.1.4)之所以叫做中立型差分方程,主要是因为在(1.1.4)中的算子 Δ 下含有时滞 k.事实上,泛函微分方程

$$[x(t) - p(t)x(t-\tau)]' + q(t)x(t-\sigma) = 0$$

也叫做一阶中立型时滞微分方程.类似地,方程

$$\Delta^m(x_n - p_n x_{n-k}) + q_n x_{n-l} = 0 \tag{1.1.5}$$

也叫做 m 阶中立型时滞差分方程,有时也直接叫做 m 阶中立型差分方程.注意到方程(1.1.5)总可以写成形式(1.1.2),因此,其解的存在性与唯一性是显然的.

另一方面,如前面所述,我们将方程(1.1.1)的解一般记为 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$.但是,为了叙述上的方便,我们常常会记为 $\{x_n\}$,或者直接称 x_n 是方程(1.1.1)的解.有时也将解记为 x, y, w 等.方程(1.1.3),(1.1.4),(1.1.5)等可类似称之.

§1.2 差分算子

由差分算子 Δ 的定义不难看出,对任意常数 α, β 有

$$\Delta(\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha\Delta x_n + \beta\Delta y_n.$$

即差分算子是线性的.另外,如下公式是显然的:

$$\Delta^2 x_n = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n,$$

$$\Delta(x_n y_n) = y_{n+1}\Delta x_n + x_n\Delta y_n,$$

$$\sum_{k=a}^{b}\Delta x_k = x_{b+1} - x_a,$$

$$\sum_{k=a}^{b} y_{k+1}\Delta x_k = x_{b+1}y_{b+1} - x_a y_a - \sum_{k=a}^{b} x_k \Delta y_k.$$

由 Δ 的定义,我们也不难计算出

$$\Delta c = 0, \quad c \text{ 是常数};$$

$$\Delta(-1)^k = 2(-1)^{k+1}, \quad k \text{ 是整数};$$

$$\Delta b^k = b^k(b-1), \quad k \in Z, b \neq 0;$$

$$\Delta b^k = b^k(b-1), \quad k > 1.$$

x 是实数,n 是正整数,记

$$x^{(n)} = x(x-1)\cdots(x-n+1).$$

容易证明,$\Delta x^{(n)} = nx^{(n-1)}$.

E 称为移位算子,它满足 $Ex_n = x_{n+1}$. 如果 I 为恒等算子,则 E 和 Δ 有关系 $\Delta = E - I$. 于是由二项式公式,有

$$\Delta^k = (E-I)^k = \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}E^i, \tag{1.2.1}$$

$$E^k = (\Delta + I)^k = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\Delta^i, \tag{1.2.2}$$

其中 $\Delta^0 = E^0 = I$. 于是对任一正整数 n,有

$$u_n = E^n u_0 = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\Delta^i u_0. \tag{1.2.3}$$

定理 1.2.1 设 k 和 n 是正整数,$k \leqslant n$,则

$$u_n = \sum_{i=0}^{k-1}\binom{n}{i}\Delta^i u_0 + \sum_{s=0}^{n-k}\binom{n-s-1}{k-1}\Delta^k u_s. \tag{1.2.4}$$

证明 由(1.2.3)可知

$$\begin{aligned}
u_n &= \sum_{i=0}^{k-1}\binom{n}{i}\Delta^i u_0 + \sum_{j=0}^{n-k}\binom{n}{k+j}\Delta^{k+j}u_0 \\
&= \sum_{i=0}^{k-1}\binom{n}{i}\Delta^i u_0 + \sum_{j=0}^{n-k}\binom{n}{k+j}\Delta^k\sum_{s=0}^{j}(-1)^{j-s}\binom{j}{s}E^s u_0 \\
&= \sum_{i=0}^{k-1}\binom{n}{i}\Delta^i u_0 + \sum_{s=0}^{n-k}\left[\sum_{j=s}^{n-k}(-1)^{j-s}\binom{n}{k+j}\binom{j}{s}\right]\Delta^k E^s u_0 \\
&= \sum_{i=0}^{k-1}\binom{n}{i}\Delta^i u_0 + \sum_{s=0}^{n-k}\binom{n-s-1}{k-1}\Delta^k u_s.
\end{aligned}$$

证毕.

定理 1.2.2 设 j,k,n 是正整数,$j \leqslant k-1$,$k \leqslant n$,则

$$\Delta^j u_n = \sum_{i=j}^{k-1}\binom{n}{i-j}\Delta^i u_0 + \sum_{s=0}^{n-k+j}\binom{n-s-1}{k-j-1}\Delta^k u_s.$$

证明 $j=0$ 时,由定理 1.2.1 知命题成立. 现假设对某个 j 成立,则

$$\begin{aligned}\Delta^{j+1}u_n &= \sum_{i=j+1}^{k-1}\binom{n}{i-j-1}\Delta^i u_0 + \sum_{s=0}^{n-k+j}\binom{n-s-1}{k-j-2}\Delta^k u_s \\ &\quad + \binom{k-j-1}{k-j-1}\Delta^k u_{n+1-k+j} \\ &= \sum_{i=j+1}^{k-1}\binom{n}{i-j-1}\Delta^i u_0 + \sum_{s=0}^{n-k+j}\binom{n-s-1}{k-j-2}\Delta^k u_s \\ &\quad + \binom{k-j-2}{k-j-2}\Delta^k u_{n+1-k+j} \\ &= \sum_{i=j+1}^{k-1}\binom{n}{i-j-1}\Delta^i u_0 + \sum_{s=0}^{n-k+j+1}\binom{n-s-1}{k-j-2}\Delta^k u_s.\end{aligned}$$

即命题对 $j+1$ 也成立. 证毕.

§1.3 不动点定理

本节将介绍一些不动点定理,它们可在一般的泛函分析书中找到,证明从略. 这些定理在本书中用于寻找方程的解.

Ω 是非空集合,在其上定义函数 $d:\Omega\times\Omega\to[0,\infty)$,如果 d 满足:(i) 任意 $x,y\in\Omega$, $d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$;(ii) 任意 $x,y\in\Omega$,有 $d(x,y)=d(y,x)$;(iii) 任意 $x,y,z\in\Omega$ 有 $d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)$,这时称 d 是距离,Ω 是一个距离空间. 距离空间中的序列 $\{x_n\}$ 如果对任意的 $\varepsilon>0$ 总有 $N=N(\varepsilon)$,当 $n,m\geqslant N$ 时恒有 $d(x_n,x_m)<\varepsilon$ 成立,这时称 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列. 如果 Ω 中的任一 Cauchy 列按距离均收敛于 Ω 中的一点,这时称 Ω 是完备的. 对于映射 $T:\Omega\to\Omega$,如果有常数 $\lambda\in[0,1)$ 使得对任意的 $x,y\in\Omega$ 有 $d(Tx,Ty)\leqslant\lambda d(x,y)$,这时称 T 是 Ω 上的压缩映射.

Ω 是一个线性空间,在其上定义非负函数 $\|\cdot\|$,它如果满足:(i) $\|x\|=0$ 当且仅当 $x=0$;(ii) $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$ 对任意标量 α 及 $x\in\Omega$ 成立;(iii) 任意 $x,y\in\Omega$ 有 $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$,则称

Ω是一赋范线性空间，$\|\cdot\|$称为Ω的范数.一个赋范线性空间如果对任意$x,y\in\Omega$，以$\|x-y\|$作为距离，它显然构成一个距离空间.一个完备的赋范线性空间称为Banach空间.对于赋范线性空间Ω的一个子集S，如果有正数M使得对任意$x\in S$有$\|x\|\leqslant M$，这时称S为有界的；如果对任意的$x,y\in S$，$\alpha x+(1-\alpha)y\in S$对$\alpha\in[0,1]$成立，称$S$是凸的；如果$S$的所有极限都含于$S$中，这时称$S$是闭的.

M和N是赋范空间，X是N的子集，算子$T:X\to M$称为关于点$x\in X$连续，如果满足任意$\varepsilon>0$，有$\delta>0$使得$y\in X\ \|y-x\|<\delta$恒有$\|Tx-Ty\|\leqslant\varepsilon$成立.$T$在$X$上连续是指在$X$上点点连续.

定理 1.3.1　(Banach压缩映射原理)完备的距离空间上的压缩映射必有不动点.

定理 1.3.2　(Brouwer唯一不动点定理)Ω是$\mathbf{R}^n$上非空有界闭凸集，$f:\Omega\to\Omega$是连续映射，则f在Ω上有一个不动点.

Banach空间X的子集S的任何无限点列都有收敛子列，这时称S具有致密性.如果$\bar{S}$是致密的，我们称S是相对致密的，其中，$\bar{S}$是由S的所有极限构成的集合.

定理 1.3.3　(Schauder不动点定理)S是Banach空间的非空闭凸集，$T:S\to S$是连续映射，且TS是相对致密的，则T在S中至少有一个不动点.

K是Banach空间X的非空闭集，如果满足：(i) $\alpha>0,x\in K$，则$\alpha x\in K$；(ii) 任意$x,y\in K$，则$x+y\in K$；(iii) $x\in K-\{0\}$，则$-x\notin K$，这时称K是一个锥.我们在X上定义偏序"$\leqslant$"：$x\leqslant y$当且仅当$y-x\in K$.M是偏序Banach空间X的子集，令$\bar{M}=\{x\in X:y\leqslant x,y\in M\}$，称$x_0\in X$是$\bar{M}$或$M$的下确界，如果对任意的$x\in\bar{M}$有$x_0\leqslant x$.上确界的概念可类似定义.

定理 1.3.4　(Knaster不动点定理)设X是具有偏序"$\leqslant$"的Banach空间.M是X的子集，它具有性质：M的下确界属于M，M的

每一非空子集的上确界属于M. $T:M\to M$ 是增映射,则 T 在M 中有不动点.

设 B 是由所有实数列$x=\{x_n\}_{n=N}^{\infty}$构成的线性空间,在其上定义范数 $\|x\|=\sup\limits_{k\geqslant N}\frac{|x_k|}{h_k}<\infty$,其中$\{h_k\}_{k=N}^{\infty}$是有一致下界的正数列.这时,$B$ 构成一 Banach 空间.$\Omega\subset B$,如果对任意的 $\varepsilon>0$,存在 M 使得当$i,j>0$ 时有$\left|\frac{x_i}{h_i}-\frac{x_j}{h_j}\right|<\varepsilon$,我们称 $x\in\{x_k\}\in\Omega$ 是一致 Cauchy 的.

定理 1.3.5 (Cheng 和 Patula 定理)[95]Ω 是 B 的有界闭凸集,$T:\Omega\to\Omega$ 是连续映射,如果 $T(\Omega)$是一致 Cauchy 的,则 T 在 Ω 中有不动点.

§1.4　Z－变换

本节介绍的 Z－变换,在解决常系数差分方程问题中十分有效,它也可以称做是离散的 Laplace 变换.给定数列$\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$,它的 Z－变换被定义为

$$Z\{u_n\}=U(z)=\sum_{n=0}^{\infty}u_nz^{-n},\tag{1.4.1}$$

其中 z 是复数.$g(z)$是复数 z 的表达式,令

$$p(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(g(z))^n,$$

显然当$|g(z)|<1$ 时,它们收敛到 $p(z)=1/(1-g(z))$.例如 $n\geqslant0$ 时 $u_n=1$,这时有

$$Z\{u_n\}=\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}=\frac{z}{z-1},\quad |z|>1.$$

而$\{u_n\}_{n=0}^{\infty}=\{a^n\}_{n=0}^{\infty}$的 Z－变换为

$$Z\{a^n\}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n=\frac{z}{z-a},\quad |z|>|a|.$$

类似地,我们也可给出$\{u_n\}_{n=N}^{\infty}$的$Z-$变换.

利用几何级数,我们容易求得$Z-$变换的逆变换Z^{-1}.例如求$Z^{-1}\left\{\frac{1}{z-a}\right\}$,这时将$U(z)=\frac{1}{z-a}$表达成$\left(\frac{1}{z}\right)^n$的级数形式即可.

$$U(z)=\frac{1}{z-a}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{(1-a/z)}$$
$$=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{n-1}}{z^n}.$$

容易得知$u_n=a^{n-1},n\geqslant1,u_0=0$.

$$Z\{u_{n+1}\}=\sum_{n=0}^{\infty}u_{n+1}z^{-n}=z\sum_{n=0}^{\infty}u_{n+1}z^{-n-1}$$
$$=z\sum_{m=1}^{\infty}u_mz^{-m}=z(-u_0+\sum_{m=0}^{\infty}u_mz^{-m})$$
$$=z(-u_0+U(z))=zU(z)-zu_0.$$

类似地,有

$$Z\{u_{n+2}\}=z^2U(z)-z^2u_0-zu_1.$$

于是,一般地有

$$Z\{u_{n+k}\}=z^kZ\{u_n\}-\sum_{m=0}^{k-1}u_mz^{k-m}. \tag{1.4.2}$$

关于$Z-$变换的线性性是显然的.即

$$Z\{c_1u_n+c_2v_n\}=c_1U(z)+c_2V(z). \tag{1.4.3}$$

$U(z)$和$V(z)$分别是$\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$和$\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$的$Z-$变换.

我们定义$\{u_n\}$和$\{v_n\}$的卷积为

$$u_n*v_n=\sum_{k=0}^{n}u_kv_{n-k}. \tag{1.4.4}$$

这时有

$$Z\{\{u*v\}_n\}=Z\left\{\sum_{k=0}^{n}u_kv_{n-k}\right\}=U(z)V(z). \tag{1.4.5}$$

例 1.4.1 考虑初值问题

$$u_{n+2} - u_{n+1} - 6u_n = 0, \tag{1.4.6}$$

$$u_0 = 0, u_1 = 3. \tag{1.4.7}$$

解 对方程(1.4.6)两边做 Z-变换,则有

$$Z\{u_{n+2} - u_{n+1} - 6u_n\} = Z\{0\}, \quad n \geqslant 0.$$

利用(1.4.2)式,有

$$z^2U(z) - z^2u_0 - zu_1 - (zU(z) - zu_0) - 6U(z) = 0.$$

将(1.4.7)式代入,则有

$$U(z) = \frac{3z}{z^2 - z - 6} = \frac{\frac{9}{5}}{z-3} + \frac{\frac{6}{5}}{z+2}.$$

于是

$$\begin{aligned} u_n &= Z^{-1}\{U(z)\} = Z^{-1}\left\{\frac{\frac{9}{5}}{z-3}\right\} + Z^{-1}\left\{\frac{\frac{6}{5}}{z+2}\right\} \\ &= \frac{9}{5}(3)^{n-1} + \frac{6}{5}(-2)^{n-1} \\ &= \frac{3}{5}(3)^n - \frac{3}{5}(-2)^n. \end{aligned}$$

例 1.4.2 考虑方程

$$u_{n+2} - u_{n+1} - 6u_n = \sin\frac{\pi n}{2}, \quad n \geqslant 2, \tag{1.4.8}$$

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 3. \tag{1.4.9}$$

解 对(1.4.8)作 Z-变换,则有

$$\begin{aligned} (z^2 - z - 6)U(z) - 3z &= Z\left\{\sin\frac{\pi n}{2}\right\} \\ &= Z\left\{\frac{1}{2i}\left(e^{\frac{in\pi}{2}} - e^{-\frac{in\pi}{2}}\right)\right\} = \frac{z}{z^2+1}. \end{aligned}$$

于是有

$$U(z)=\frac{31}{50}\cdot\frac{1}{z-3}-\frac{14}{25}\cdot\frac{1}{z+2}-\frac{1}{50}\cdot\frac{7z+1}{z^2+1}.$$

由此可知

$$u_n=\frac{31}{50}(3)^n-\frac{14}{25}(-2)^n-\frac{1}{50}\begin{cases}(-1)^{\frac{n}{2}-1}, & n\text{ 是偶数},\\ 7(-1)^{\frac{n-1}{2}}, & n\text{ 是奇数}.\end{cases}$$

第二章　一阶时滞差分方程的振动性

§2.1　常系数差分方程

本节将考虑常系数差分方程

$$x_{n+1}-x_n+\sum_{i=1}^{m}p_i x_{n-k_i}=0,\quad n=0,1,\cdots,\tag{2.1.1}$$

其中，$p_i(i=1,2,\cdots,m)$是实数，$k_i(i=1,2,\cdots,m)$是非负整数.

首先我们有如下结果.

定理 2.1.1　方程(2.1.1)振动的充要条件是对应的特征方程

$$\lambda-1+\sum_{i=1}^{m}p_i\lambda^{-k_i}=0\tag{2.1.2}$$

无正根.

该定理的证明可采用§1.4 中的 Z - 变换，请读者自证.

显然，如果 $k_i=0,(i=1,2,\cdots,m)$，方程(2.1.2)无正根的充要条件是

$$\sum_{i=1}^{m}p_i\geqslant 1.$$

因此，不妨设 $k_i(i=1,2,\cdots,m)$至少有一个不为零.

考虑比方程(2.1.1)更一般的方程

$$x_{n+k}+p_1x_{n+k-1}+\cdots+p_kx_n=0,\quad n=0,1,\cdots\tag{2.1.3}$$

其中 k 是正整数，$p_i(i=1,2,\cdots,m)$是实数. 对应于定理 1.2.1 有如下结果.

定理 2.1.2　方程(2.1.3)振动的充要条件是代数方程

$$\lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + \cdots + p_k = 0 \tag{2.1.4}$$

无正根.

证明　"⇒". 设(2.1.3)振动而(2.1.4)有正根 λ_0, 令 $x_n = \lambda_0^n$. 它显然是(2.1.3)的一个解.

"⇐". 设$\{x_n\}$是(2.1.3)的最终正解. 不失一般性, 设当 $n \geqslant 0$ 时 $x_n > 0$. 设 $b = \max\{a_0, a_1, \cdots, a_k\}$并选择 $c \in [1, \infty)$使得

$$|p_1|c^{-1} + \cdots + |p_k|c^{-k} \leqslant 1. \tag{2.1.5}$$

这时, 显然有

$$|x_n| \leqslant b \leqslant bc^{-n}, \quad n = 0, 1, \cdots, k.$$

设有 $n_0 \geqslant k + 1$ 使得

$$|x_n| \leqslant bc^n, \quad n = 0, 1, \cdots, n_0, \tag{2.1.6}$$

而

$$|x_{n_0+1}| > bc^{n_0+1}. \tag{2.1.7}$$

对于 $n = (n_0 - k) + 1$, 由(2.1.3)可知

$$x_{n_0+1} = -(p_1 x_{n_0} + \cdots + p_k x_{n_0+1-k}).$$

因此由(2.1.5)式和(2.1.6)式知

$$|x_{n_0+1}| \leqslant |p_1| bc^{n_0} + \cdots + |p_k| bc^{n_0+1-k})$$

$$= bc^{n_0+1}\left(\sum_{i=1}^{k} |p_i| c^{-i}\right) \leqslant bc^{n_0+1}.$$

这与(2.1.7)式矛盾. 因此有

$$x_n \leqslant bc^n, \quad n = 0, 1, 2, \cdots. \tag{2.1.8}$$

对$\{x_n\}$做 Z − 变换, 则有

$$Z(z) = Z(x_n) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^{-n}.$$

利用§1.4中的知识有

$$f(z)Z(z) = \varphi(z), \quad |z| > c, \tag{2.1.9}$$

其中

$$f(z)=\sum_{i=0}^{k}p_i z^{k-i},$$

$$\varphi(z)=\sum_{i=0}^{k}p_i\sum_{j=0}^{k-i-1}z^{k-i-j}x_j.$$

由假设可知,当 $z>0$ 时 $f(z)\neq 0$,而 $\lim\limits_{z\to+\infty}f(z)=\infty$. 于是 $f(z)>0, z>0$. 令 $W(z)=Z(\frac{1}{z})$, 于是有 $f(\frac{1}{z})W(z)=\varphi(\frac{1}{z})$. 设正系数级数 $W(z)$ 的收敛半径为 ρ,于是有

$$f(\frac{1}{z})W(z)=\varphi(\frac{1}{z}),\quad 0<|z|<\rho.$$

由文献[166]中定理1.4.1知,正项幂级数的收敛半径如果是 $\rho<\infty$,则它在 $z=\rho$ 上有一个奇点. 注意到 $f(\frac{1}{z})\neq 0$, 因此 $\dfrac{\varphi(\frac{1}{z})}{f(\frac{1}{z})}$ 点点解析. 这是一个矛盾. 于是 $\rho=\infty$. 则(2.1.9)式对 $|z|>0$ 点点成立. 那么对充分大的 n 也有 $x_n=0$. 否则 $z=0$ 是(2.1.9)的奇点. 这又是一个矛盾. 证毕.

定理 2.1.3 设 $p_i>0(i=1,2,\cdots,m)$,那么方程(2.1.1)振动的充要条件是

$$\lambda_0-1+\sum_{i=1}^{m}p_i\lambda_0^{-k_i}>0,\tag{2.1.10}$$

其中 λ_0 是方程

$$\sum_{i=1}^{m}p_ik_i\lambda^{-k_i-1}=1\tag{2.1.11}$$

的唯一正根.

证明 令

$$F(\lambda)=\lambda-1+\sum_{i=1}^{m}p_i\lambda^{-k_i},\quad \lambda>0.$$

注意到 $\lambda>0$ 时 $F''(\lambda)>0$. 因此 $F'(\lambda)=0$ 的唯一正根 λ_0 是 $F(\lambda)$

的极小值点.从而由(2.1.10)可知 $\lambda>0$ 时 $F(\lambda)>0$ 成立.充分性得以证明.

相反,设方程(2.1.1)振动,且

$$\lambda_0-1+\sum_{i=1}^{m}p_i\lambda_0^{-k_i}\leqslant 0$$

对(2.1.11)的正根 λ_0 成立.而 $\lim_{\lambda\to\infty}F(\lambda)=\infty$.因此,存在正数 $\bar{\lambda}$ 使得 $F(\bar{\lambda})=0$.令 $x_n=\bar{\lambda}^n$,则 x_n 是方程(2.1.1)的一个非振动解.因此矛盾.证毕.

定理 2.1.4 设 $p_i>0,(i=1,2,\cdots,m)$,则方程(2.1.1)振动的充要条件是存在数 A_i,$0\leqslant A_i\leqslant 1$,$i=1,2,\cdots,m$,使得

$$\sum_{i=1}^{m}A_i=1 \tag{2.1.12}$$

成立,且有

$$\sum_{i=1}^{m}\left[A_i^{k_i}p_i\frac{(k_i+1)^{k_i+1}}{k_i^{k_i}}\right]^{\frac{1}{(k_i+1)}}>1. \tag{2.1.13}$$

证明 如果存在非负实数 $A_i(i=1,2,\cdots,m)$使得(2.1.12)和(2.1.13)成立,由定理2.1.3可知方程(2.1.2)无正根.确实,令

$$f_i(\lambda)A_i\lambda+p_i\lambda^{-k_i},\lambda>0,i=1,2,\cdots,m,$$

可知 $A_i\neq 0$,$f_i(\lambda)$的极小值点为 $\lambda_i=\left(\frac{p_ik_i}{A_i}\right)^{\frac{1}{(k_i+1)}}$.而 $A_i=0$ 时 $k_i\neq 0$,可知 $f_i(\lambda)>0$.当 $A_i=0,k_i=0$ 时可知 $f_i(\lambda)\equiv p_i>0$.于是有

$$F(\lambda)=-1+\sum_{i=1}^{m}f_i(\lambda)\geqslant -1+\sum_{i=1}^{m}\left[A_i^{k_i}p_i\frac{(k_i+1)^{k_i+1}}{k_i^{k_i}}\right]^{\frac{1}{(k_i+1)}}>0.$$

如果方程(2.1.1)振动,则由定理2.1.3可知方程(2.1.11)有唯一正根且使得(2.1.10)成立.令

$$A_i=p_ik_i\lambda_0^{-k_i-1},\quad i=1,\cdots,m.$$

由(2.1.11)知(2.1.12)显然成立,且有

$$\sum_{i=1}^{m}\left[A_i^{k_i}p_i\frac{(1+k_i)^{k_i+1}}{k_i^{k_i}}\right]^{\frac{1}{(1+k_i)}}$$

$$=\sum_{i=1}^{m}p_i(1+k_i)\lambda_0^{-k_i}$$

$$=\lambda_0\sum_{i=1}^{m}p_ik_i\lambda_0^{-1-k_i}+\sum_{i=1}^{m}p_i\lambda_0^{-k_i}$$

$$=\lambda_0+\sum_{i=1}^{m}p_i\lambda_0^{-k_i}>\lambda_0+(1-\lambda_0)=1.$$

证毕.

由定理 2.1.4 显然可以得到

推理 2.1.1 $p>0$ 时,方程

$$x_{n+1}-x_n+px_{n-k}=0 \tag{2.1.14}$$

振动的充要条件是

$$p\frac{(k+1)^{k+1}}{k^k}>1. \tag{2.1.15}$$

接下来,我们考虑方程

$$x_{n+1}-x_n+px_{n-k}+qx_{n-l}=0. \tag{2.1.16}$$

定理 2.1.5 假设 $k>l\geqslant1$,则方程(2.1.16)振动的充要条件是 $p>0$,且$(k+1)\xi^{-k}p+(l+1)\xi^{-l}q>1$.其中 ξ 是方程

$$p=\frac{\lambda^k}{k-l}(k+1)\left(\lambda-\frac{k}{k+1}\right) \tag{2.1.17}$$

在区间$\left(\frac{l}{(l+1)},\infty\right)$上的唯一正根.

证明 $k>l\geqslant1$ 时,特征方程(2.1.2)变为

$$f(p,q,\lambda)=\lambda^{k+1}-\lambda^k+p+q\lambda^{k-l}=0. \tag{2.1.18}$$

注意到 $f(p,q,0)=p$, $\lim\limits_{\lambda\to\infty}f(p,q,\lambda)=\infty$. 因此, $p<0$ 时(2.1.18)有正根,所以我们只需考虑 $p>0$ 的情况. 这时候 $f(p,q,\lambda)$是关于 λ 的曲线族. 而对于特殊的 λ,方程(2.1.11)显然关于 p,q 构成直线方

程.这样,由包络理论[23]知,(2.1.18)的包络由

$$f(x,y,\lambda)=0$$

和

$$f_\lambda(x,y,\lambda)=(k+1)\lambda^k-k\lambda^{k-1}+y(k-l)\lambda^{k-l-1}=0$$

确定.对应的参数方程为

$$x(\lambda)=\frac{l+1}{k-l}\lambda^k(\lambda-\frac{l}{l+1}),$$

$$y(\lambda)=-\frac{k+1}{k-l}\lambda^k(\lambda-\frac{k}{k+1}),\qquad \lambda>0.$$

显然,$\lambda^*=\dfrac{kl}{(l+1)(k+1)}$是 $x(\lambda)$的唯一极大点和 $y(\lambda)$的唯一极小点.求$\dfrac{dy}{dx}$和$\dfrac{d^2y}{dx^2}$可知 $\lambda\in(0,\lambda^*)$时,y 做为x 的函数是严格减少的凸函数;而 $\lambda\in(\lambda^*,\infty)$时,$y$ 做为x 的函数是严格增加的凹函数.同时,$x(\lambda)>0$ 当且仅当 $\lambda>\dfrac{l}{(l+1)}$成立.这样一来,由参数 λ 确定了两支曲线C_1 和 C_2.设 Ω 是由 x 轴右半部分及曲线C_2 上方构成的开域,那么对于右半平面上的任一点(p,q),过该点有一条直线与包络相切当且仅当$(p,q)\notin\Omega$.因此,(2.1.18)当 $p>0$ 时无正根的充要条件是$(p,q)\in\Omega$.即,

$$q>y(\lambda)=-\frac{k+1}{k-l}\lambda^l(\lambda-\frac{k}{k+1}).$$

λ 是$x(\lambda)=p$ 的根.注意到 $\lambda\in(0,\dfrac{l}{l+1}),x(\lambda)\leqslant0$,而 $\lambda>\dfrac{l}{(l+1)}$时,$x'(\lambda)>0$,于是 $x(\lambda)=p$ 有唯一正根$\xi\in(\dfrac{l}{(l+1)},\infty)$,同时

$$\frac{\xi^{-k}}{l+1}p+\frac{\xi^{-l}}{k+1}q>\frac{1}{k-l}(\xi-\frac{l}{l+1})-\frac{1}{k-l}(\xi-\frac{k}{k+1})$$

$$=\frac{1}{(l+1)(k+1)}.$$

证毕.

定理 2.1.6 若 $k>l=0$,则方程(2.1.17)振动的充要条件是 $p>0$且 $q\geqslant 1$,或 $q<1$ 且有

$$p>(1-q)^{k+1}\frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}. \tag{2.1.19}$$

证明 这时,特征方程变为

$$f(p,q,\lambda)=\lambda^{k+1}+(q-1)\lambda^k+p=0. \tag{2.1.20}$$

而 $f(p,q,0)=p$ 且 $f(p,q,\lambda)=\infty$. 因此 $p<0$ 时(2.1.20)有正根. 所以我们只考虑 $p>0$ 的情况.

当 $p>0,q\geqslant 1$ 时显然有 $f(p,q,\lambda)>0$,(2.1.20)无正根. 当 $p>0,q<1$ 时,由 f_λ 和 $f_{\lambda\lambda}$ 可求得 $f(p,q,\lambda)$ 的唯一极小值点 $\lambda^*=\dfrac{k(1-q)}{k+1}>0$,且

$$f(p,q,\lambda^*)=p-\frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}(1-q)^{k+1}.$$

证毕.

§2.2 变系数差分方程(I)

本节中将考虑差分方程

$$x_{n+1}-x_n+p_nx_{n-k}=0,\quad n=0,1,2\cdots, \tag{2.2.1}$$

其中 $k\geqslant 0$ 是整数,$\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$是实数列. 为得到我们的主要结果,首先考察 $k=0$ 的情况. 这时,方程(2.2.1)变为

$$x_{n+1}=x_n(1-p_n). \tag{2.2.2}$$

其通解可以写成

$$x_n=x_0\prod_{i=0}^{n-1}(1-p_i)\quad n=1,2,\cdots.$$

显然,当 $p_n<1$ 时方程(2.2.2)的所有解非振动,而当有子列 $\{p_{n(i)}\}$ 使得 $p_{n(i)}\geqslant 1$ 时,方程(2.2.2)的所有解振动.

当 $k>0$ 时,如果 $\{x_n\}$ 是方程(2.2.1)的一个解,且对某一 l 有 $p_l x_{l-k}\geqslant 0$, 则由(2.2.2)可知 $x_l\geqslant x_{l+1}$. 类似地,如果存在 l 及某一 $j\in\{0,1,\cdots,k\}$ 使得

$$p_{l-k},p_{l-k+1},\cdots,p_{l+j}\geqslant 0,x_{l-2k},x_{l-2k+1},\cdots,x_{l-k-1}\geqslant 0,$$

则有

$$x_{l+j+1}\leqslant(1-p_l-\cdots-p_{l+j})x_l.$$

于是有如下定理成立.

定理 2.2.1　设 $j\in\{0,1,\cdots,k\}$, 如果 $\{p_n\}$ 有子列 $\{p_{n(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ 使得

$$p_{n(i)-k},p_{n(i)-k+1},\cdots,p_{n(i)+j}\geqslant 0,\tag{2.2.3}$$

$$p_{n(i)}+p_{n(i)+1}+\cdots+p_{n(i)+j}\geqslant 1,\tag{2.2.4}$$

则方程(2.2.1)振动.

事实上,如果 $\{x_n\}$ 是(2.2.1)的一个最终正解,则有正整数 I 使得 $n\geqslant n(I)-2k$ 时 $x_n>0$ 成立. 由上面证明可知

$$0<x_{n(I)+j+1}\leqslant(1-p_{n(I)}-\cdots-p_{n(I)+j})x_{n(I)}\leqslant 0.$$

这是一个矛盾. 证毕.

由定理 2.2.1 显然有如下结果.

推论 2.2.1　如果 $\{p_n\}$ 有子列 $\{p_{n(i)}\}$ 使得 $n(i)-2k\leqslant n\leqslant n(i)$ 时, $p_n\geqslant 0$ 且

$$\sum_{j=n(i)-k}^{n(i)}p_j\geqslant 1.\tag{2.2.5}$$

则(2.2.1)振动.

当然,我们也会有

推论 2.2.2　设有正整数子列 $\{r_m\}$ 和 $\{s_m\}$ 使得

$$s_m-r_m\geqslant 2k,\qquad m\geqslant 1,$$

$$p_n\geqslant 0,\quad n\in\bigcup_{m=1}^{\infty}\{r_m,r_{m+1},\cdots,s_m\}$$

且

$$\limsup_{m\to\infty}\sum_{i=s_m-k}^{s_m}p_i>1,$$

则(2.2.1)振动.

定理 2.2.2 设$\{p_n\}$有子列$\{p_{n(i)}\}_{i=1}^{\infty}$满足

$$p_{n(i)-2k},p_{n(i)-2k+1},\cdots,p_{n(i)-k-1}\geqslant 0, \tag{2.2.6}$$

$$0\leqslant p_{n(i)-k},p_{n(i)-k+1},\cdots,p_{n(i)-1}<1, \tag{2.2.7}$$

且

$$p_{n(i)}\geqslant\prod_{l=1}^{k}\prod_{j=1}^{l}(1-p_{n(i)-j})^{\frac{1}{k}}, \tag{2.2.8}$$

则(2.2.1)振动.

证明 设$\{x_n\}$是(2.2.1)的最终正解. 则有 I 使得$l\geqslant n(I)-2k$时$x_l>0$. 由定理 2.2.1 前面的议论,则有

$$x_{n(I)}\leqslant(1-p_{n(I)-1})x_{n(I)-1},\cdots,x_{n(I)-k+1}\leqslant(1-p_{n(I)-k})x_{n(I)-k}.$$

因此

$$x_{n(I)}\leqslant\prod_{j=1}^{k}(1-p_{n(I)-j})x_{n(I)-k},$$

$$x_{n(I)}\leqslant x_{n(I)-1}\leqslant\prod_{j=1}^{k-1}(1-p_{n(I)-j})x_{n(I)-k},$$

$$\vdots$$

$$x_{n(I)}\leqslant x_{n(I)-k+1}\leqslant(1-p_{n(I)-k})x_{n(I)-k}.$$

于是

$$x_{n(I)}^{k}\leqslant x_{n(I)}x_{n(I)-1}\cdots x_{n(I)-k}\leqslant\prod_{l=1}^{k}\prod_{j=1}^{l}(1-p_{n(I)-j})x_{n(I)-k}^{k}.$$

从而

$$x_{n(I)}\geqslant\prod_{l=1}^{k}\prod_{j=1}^{l}(1-p_{n(i)-j})^{\frac{1}{k}}x_{n(I)-k}.$$

由(2.2.1)知

$$0<x_{n(I)+1}=x_{n(I)}-p_{n(I)}x_{n(I)-k}$$

$$\leqslant \left[\prod_{l=1}^{k} \prod_{j=1}^{l} (1 - p_{n(I)-j})^{\frac{1}{k}} - p_{n(I)} \right] x_{n(I)-k} \leqslant 0.$$

这是一个矛盾.证毕.

如果 p_n 有子列 $\{p_{n(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ 使得

$$p_{n(i)-3k}, \cdots, p_{n(i)-1} \geqslant 0. \tag{2.2.9}$$

$\{x_n\}$ 是(2.2.1)的一个最终正解,则有 I 使得 $l \geqslant n(I) - 4k$ 时 $x_l > 0$. 另设

$$\sum_{j=1}^{k} p_{n(i)-j-1}, \sum_{j=1}^{k} p_{n(i)-j-2}, \cdots, \sum_{j=1}^{k} p_{n(i)-j-k} < 1, \tag{2.2.10}$$

$$\frac{p_{n(i)-1}}{1 - \sum_{j=1}^{k} p_{n(i)-j-1}}, \cdots, \frac{p_{n(i)-k}}{1 - \sum_{j=1}^{k} p_{n(i)-j-k}} < 1, \tag{2.2.11}$$

且

$$p_{n(i)} \geqslant \prod_{l=1}^{k} \left(1 - \frac{p_{n(i)-l}}{1 - \sum_{j=1}^{k} p_{n(i)-j-l}} \right). \tag{2.2.12}$$

这时自然有

$$x_{n(I)} \leqslant x_{n(I)-1} \left(1 - \frac{p_{n(I)-1}}{1 - \sum_{j=1}^{k} p_{n(I)-j-1}} \right), \cdots,$$

$$x_{n(I)-k+1} \leqslant x_{n(I)-k} \left(1 - \frac{p_{n(I)-1}}{1 - \sum_{j=1}^{k} p_{n(I)-j-k}} \right).$$

因此

$$x_{n(I)} \leqslant x_{n(I)-k} \prod_{l=1}^{k} \left(1 - \frac{p_{n(I)-l}}{1 - \sum_{j=1}^{k} p_{n(I)-j-l}} \right).$$

由(2.2.1)知

$$0 < x_{n(I)+1} = x_{n(I)} - p_{n(I)} x_{n(I)-k}$$

$$\leqslant x_{n(l)-k}\left\{\prod_{l=1}^{k}\left[1-\frac{p_{n(l)-l}}{1-\sum_{j=1}^{k}p_{n(l)-j-l}}\right]-p_{n(l)}\right\}\leqslant 0.$$

这也是一个矛盾.因此,我们有如下定理:

定理 2.2.3 如果 $\{p_n\}$ 有子列 $\{p_{n(l)}\}_{l=1}^{\infty}$ 使得(2.2.9),(2.2.10),(2.2.11)和(2.2.12)成立,则(2.2.1)振动.

定理 2.2.4 如果有正整数子列 $\{r_m\}$ 和 $\{s_m\}$ 使得

$$s_m-r_m\geqslant 2k,\lim_{m\to\infty}(s_m-r_m)=\infty, \tag{2.2.13}$$

$$p_n\geqslant 0,n\in\bigcup_{m=1}^{\infty}\{r_m,r_{m+1},\cdots,s_m\}, \tag{2.2.14}$$

且有

$$\liminf_{n\to\infty}\sum_{i=n-k}^{n-1}p_i>\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1},\quad n\in\bigcup_{m=1}^{\infty}\{r_m,r_{m+1},\cdots,s_m\}, \tag{2.2.15}$$

则(2.2.1)振动.

证明 设(2.2.1)有最终正解 $\{x_n\}$,则有 n_0 使得 $n\geqslant n_0$ 时 $x_n>0$.由(2.2.1)和(2.2.14)知有 M_1 使得

$$x_n>0,x_{n-k}>0,x_{n+1}\leqslant x_n,n\in\bigcup_{m=M_1}^{\infty}\{r_m,r_{m+1},\cdots,s_m\}. \tag{2.2.16}$$

令

$$A=\frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}. \tag{2.2.17}$$

通过(2.2.15),我们可选择 $B>0$ 和 $M_2\geqslant M_1$ 使得

$$\frac{1}{k}\sum_{i=n-k}^{n-1}p_i\geqslant B>A,n=\bigcup_{m=M_2}^{\infty}\{r_m+k,\cdots,s_m\}. \tag{2.2.18}$$

由(2.2.13)和(2.2.18)知,有正整数 N 和 $m_N\geqslant M_2$ 使得

$$\left(\frac{B}{A}\right)^N>\left(\frac{2}{kB}\right)^2, \tag{2.2.19}$$

且

$$s_{m_N} - r_{m_N} \geqslant (N+2)k. \tag{2.2.20}$$

由(2.2.1)知

$$\frac{1}{k}\sum_{i=n-k}^{n-1} p_i = \frac{1}{k}\sum_{i=n-k}^{n-1}\left(1 - \frac{x_{i+1}}{x_i}\right).$$

由(2.2.18)有

$$B \leqslant \frac{1}{k}\sum_{i=n-k}^{n-1}\left(1 - \frac{x_{i+1}}{x_i}\right), n \in \{r_{m_{t_N}} + 2k, \cdots, s_{m_N}\}. \tag{2.2.21}$$

即有

$$B \leqslant 1 - \frac{1}{k}\sum_{i=n-k}^{n-1}\frac{x_{i+1}}{x_i} \leqslant 1 - \left(\prod_{i=n-k}^{n-1}\frac{x_{i+1}}{x_i}\right)^{\frac{1}{k}} = 1 - \left(\frac{x_n}{x_{n-k}}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

从而有

$$\left(\frac{x_n}{x_{n-k}}\right)^{\frac{1}{k}} \leqslant 1 - B, n \in \{r_{m_N} + 2k, \cdots, s_{m_N}\}. \tag{2.2.22}$$

注意到 $0<B<1$,以及

$$\operatorname*{man}_{0\leqslant\lambda\leqslant 1}[(1-\lambda)\lambda^{\frac{1}{k}}] = \frac{k}{(1+k)^{1+\frac{1}{k}}} \cdot A^{\frac{1}{k}}.$$

我们有

$$1 - B \leqslant A^{\frac{1}{k}} B^{-\frac{1}{k}}.$$

因此有

$$\frac{Bx_n}{A} \leqslant x_{n-k}, n \in \{r_{m_n} + 2k, \cdots, s_{m_n}\}. \tag{2.2.23}$$

把上式代入(2.2.1)中,我们有

$$\left(\frac{B}{A}\right)^2 x_n \leqslant x_{n-k}, n \in \{r_{n_N} + 3k, \cdots, s_{m_N}\}.$$

归纳可知

$$\left(\frac{B}{A}\right)^N x_n \leqslant x_{n-k}, n \in \{r_{n_N} + (N+1)k, \cdots, s_{m_N}\}. \tag{2.2.24}$$

另一方面,由(2.2.18)可知有 $n^* \in [s_{m_N}-k, s_{m_N}]$使得

$$\sum_{i=s_{m_N}-k}^{n^*} p_i \geqslant \frac{Bk}{2}, \quad \sum_{i=n^*}^{s_{m_N}} p_i \geqslant \frac{Bk}{2}.$$

对(2.2.1)求和有

$$x_{n^*+1} - x_{s_{m_N}-k} = -\sum_{i=s_{m_N}-k}^{n^*} p_i x_{i-k} \leqslant -\sum_{i=s_{m_N}-k}^{n^*} p_i x_{n^*-k} \leqslant -\frac{Bk}{2} x_{n^*-k}.$$

即有

$$\frac{Bk}{2} x_{n^*-k} \leqslant x_{s_{m_N}-k}. \tag{2.2.25}$$

类似地,由

$$x_{s_{m_N}+1} - x_{n^*} = -\sum_{i=n^*}^{s_{m_N}} p_i x_{i-k} \leqslant -\frac{Bk}{2} x_{s_{m_N}-k},$$

即有

$$\frac{Bk}{2} x_{s_{m_N}-k} \leqslant x_{n^*}. \tag{2.2.26}$$

比较(2.2.25)和(2.2.26)有

$$\left(\frac{Bk}{2}\right)^2 x_{n^*-k} \leqslant x_{n^*}. \tag{2.2.27}$$

从而,再由(2.2.24)可知

$$\left(\frac{B}{A}\right)^N \leqslant \frac{x_{n^*-k}}{x_{n^*}} \leqslant \left(\frac{2}{Bk}\right)^2.$$

这与(2.2.19)矛盾.证毕.

§2.3 变系数差分方程(II)

这一节,我们仍然考虑方程(2.2.1),但这里要求 p_n 非负.为了叙述的方便,我们再次将方程(2.2.1)列出.

$$\Delta x_n + p_n x_{n-k} = 0 \qquad n = 0,1,2,\cdots. \tag{2.3.1}$$

显然，§ 2.2 中的各个定理及推论也适合方程(2.3.1). 特别地，由定理 2.2.4 有

定理 2.3.1　如果

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{i=n-k}^{n-1} p_i > \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1}, \tag{2.3.2}$$

则方程(2.3.1)振动.

当条件(2.3.2)不成立时，我们可建立另外的结果. 为此，先来看一个引理.

引理 2.3.1　设$\{x_n\}$是方程(2.3.1)的最终正解，且

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{i=n-k}^{n-1} p_i > M > 0. \tag{2.3.3}$$

则有

$$\frac{x_n}{x_{n-k}} > \left(\frac{M}{2}\right)^2. \tag{2.3.4}$$

证明　由(2.3.3)可知

$$\sum_{i=n-k}^{n-1} p_i \geqslant M$$

最终成立. 于是对任意大的 n 有 $n^*: n \leqslant n^* \leqslant n+k$ 使得

$$\sum_{i=n}^{n^*-1} p_i < \frac{M}{2}, \quad \sum_{i=n}^{n^*} p_i \geqslant \frac{M}{2}.$$

因此有

$$\sum_{i=n^*-k}^{n} p_i = \sum_{i=n^*-k}^{n^*-1} p_i - \sum_{i=n+1}^{n^*-1} p_i \geqslant \frac{M}{2}.$$

对方程(2.3.1)求和，则有

$$x_n - x_{n^*+1} = \sum_{i=n}^{n^*} p_i x_{i-k} \geqslant x_{n^*-k} \cdot \frac{M}{2},$$

$$x_{n^*-k} - x_{n+1} = \sum_{i=n^*-k}^{n} p_i x_{i-k} \geqslant x_{n-k} \cdot \frac{M}{2}.$$

比较上面两个不等式,则有

$$x_n > x_{n^*-k} \cdot \frac{M}{2} \geqslant x_{n-k} \cdot \frac{M^2}{4}.$$

证毕.

定理 2.3.2 如果(2.3.3)成立,且

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{i=n-k}^{n-1} p_i > 1 - \left(\frac{M}{2}\right)^2, \tag{2.3.5}$$

则方程(2.3.1)振动.

证明 设$\{x_n\}$是方程(2.3.1)的一个最终正解,则$\{x_n\}$是最终正的非增数列.从 $n-k$ 到$n-1$ 对方程(2.3.1)求和,并利用$\{x_n\}$的单调性有

$$x_n - x_{n-k} + \left(\sum_{i=n-k}^{n-1} p_i\right) x_{n-k} \leqslant 0,$$

或者

$$x_{n-k}\left(\sum_{i=n-k}^{n-1} p_i + \frac{x_n}{x_{n-k}} - 1\right) \leqslant 0.$$

注意到引理 2.3.1 及(2.3.5),可以推知上式是一个矛盾.证毕.

由定理 2.3.2 显然可以得到如下结果.

推论 2.3.1 如果(2.3.3)成立,且

$$\limsup_{n\to\infty} p_n > 1 - \left(\frac{M}{2}\right)^2,$$

则方程(2.3.1)振动.

§2.4 频率测度与振动

为了叙述上的方便,我们先给出一些常用记号.设 Ω 是一个整数集,记 Ω 中的小于等于 n 的整数的集合为 $\Omega^{(n)}$,即

$$\Omega^{(n)} = \Omega \cap (\cdots, n-1, n).$$

m 是一个整数,令

$$E^m\Omega = \{x + m \mid x \in \Omega\}.$$

α,β 是两个整数且 $\alpha \leqslant \beta$,令

$$\sigma_\alpha^\beta(\Omega) = \bigcup_{i=\alpha}^{\beta} E^i\Omega.$$

注意到 $j \in E^m\Omega \Leftrightarrow j - m \in \Omega$. 因此有

$$j \in \mathbf{Z} \setminus (\sigma_\alpha^\beta(\Omega)) \Leftrightarrow j \in \bigcap_{i=\alpha}^{\beta} \mathbf{Z} \setminus (E^i\Omega) \Leftrightarrow j - k \in \Omega, \quad \alpha \leqslant k \leqslant \beta. \tag{2.4.1}$$

其中 $\mathbf{Z}$ 是所有整数组成的集合.

定义 2.4.1　Ω 是一个整数集,如果

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|\Omega^{(n)}|}{n}$$

存在,记它为 $\mu^*(\Omega)$,称为 Ω 的上测度. 类似地,如果

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{|\Omega^{(n)}|}{n}$$

存在,记它为 $\mu_*(\Omega)$,称为 Ω 的下测度. 如果 Ω 的上,下测度均存在,且 $\mu_*(\Omega) = \mu^*(\Omega)$,则称 Ω 是一致可测的,并记其测度为 $\mu(\Omega)$. (其中 $|\Omega^{(n)}|$ 表示 $\Omega^{(n)}$ 的基数).

为了解释如上定义,我们看几个例子.

例如,$\mu(\mathbf{N}) = 1$, $\mu(\varnothing) = 0$, 对任意 $\Omega \subset \mathbf{N}$ 有 $0 \leqslant \mu_*(\Omega) \leqslant \mu^*(\Omega) \leqslant 1$,对任意有限集 Ω 有 $\mu^*(\Omega) = 0$.

例 2.4.1　考虑振动数列

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{(-1)^{n+1}\}.$$

设 $\Omega = \left\{n \in \mathbf{N} \,\middle|\, x_n > \frac{1}{2}\right\}$, $\Gamma = \left\{n \in \mathbf{N} \,\middle|\, x_n \leqslant -\frac{1}{2}\right\}$,那么 $\mu(\Omega) = \mu(\Gamma) = \frac{1}{2}$.

例 2.4.2　考虑振动数列

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}=\{1,1,1,1,-1,1,1,1,1,-1,\cdots\}.$$

设 $\Omega=\left\{n\in\mathbf{N}\,\middle|\,x_n\geqslant\frac{1}{2}\right\}$，$\Gamma=\left\{n\in\mathbf{N}\,\middle|\,x_n\leqslant-\frac{1}{2}\right\}$. 那么，$\mu(\Omega)=\frac{4}{5}$，$\mu(\Gamma)=\frac{1}{5}$.

设 $f:A\to\mathbf{R}$ 表示由集合 A 到 $\mathbf{R}$ 的实函数，集合 $\{t\in A\mid f(t)\leqslant c\}$ 被记为$(f\leqslant c)$. 记法$(f\geqslant c)$，$(f<c)$等与之类似.

定义 2.4.2 $x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是实数列，如果 $\mu^*(x\leqslant0)=0$，则称 x 是几乎最终正的；如果 $\mu^*(x\geqslant0)=0$，则称 x 是几乎最终负的. 如果 x 既不是几乎最终正的，也不是几乎最终负的，则 x 称为一致振动.

显然，如果是最终正的，那么它也是几乎最终正的；如果 x 是最终负的，那么它也是几乎最终负的. 因此，一致振动也是振动的.

定义 2.4.3 $x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$是实数列. 如果 $\mu^*(x\leqslant0)\leqslant\omega$，那么 x 称为有上度 ω 几乎最终正的；如果 $\mu^*(x\geqslant0)\leqslant\omega$，那么 x 称为有上度 ω 几乎最终负的. 数列 x 称为有上度 ω 一致振动的，如果它有相同的上度 ω，且既不是几乎最终正的，也不是几乎最终负的. 关于有下度几乎最终正的概念可以通过 μ_* 类似定义.

如果 x 是有下度 ω 一致振动，那么它也是有上度 ω 一致振动，有任意上度的一致振动是一致振动的.

例 2.4.3 考察数列

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}=\{1,1,1,-1,1,1,1,-1,\cdots\}.$$

因为 $\mu_*(x\leqslant0)=\frac{1}{4}$，$\mu_*(x\geqslant0)=\frac{3}{4}$，因此 x 是有下度 $\frac{1}{4}$ 几乎最终正的，有下度 $\frac{3}{4}$ 几乎最终负的，且它是有下度 $\frac{1}{5}$ 一致振动的.

接下来，我们讨论关于测度的性质.

性质 2.4.1 $\Omega,\Gamma\subseteq\mathbf{N}$ 且 $\Omega\subseteq\Gamma$，那么

$$\mu^*(\Omega)\leqslant\mu^*(\Gamma),\quad \mu_*(\Omega)\leqslant\mu_*(\Gamma).$$

证明 因为 $\Omega\subseteq\Gamma$，所以 $\Omega^{(n)}\subseteq\Gamma^{(n)}$，因此有

$$\mu^*(\Omega) = \limsup_{n\to\infty} \frac{|\Omega^{(n)}|}{n} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{|\Gamma^{(n)}|}{n} = \mu^*(\Gamma),$$

$$\mu_*(\Omega) = \liminf_{n\to\infty} \frac{|\Omega^{(n)}|}{n} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \frac{|\Gamma^{(n)}|}{n} = \mu_*(\Gamma).$$

性质 2.4.2 如果 $\Omega, \Gamma \subseteq \mathbf{N}$，那么

$$\mu^*(\Omega + \Gamma) \leqslant \mu^*(\Omega) + \mu^*(\Gamma).$$

同时，如果 $\Omega \cap \Gamma = \varnothing$，那么

$$\mu_*(\Omega) + \mu_*(\Gamma) \leqslant \mu_*(\Omega + \Gamma) \leqslant \mu_*(\Omega) + \mu^*(\Gamma)$$

$$\leqslant \mu^*(\Omega + \Gamma) \leqslant \mu^*(\Omega) + \mu^*(\Gamma).$$

证明 第一个不等式显然成立. 如果 $\Omega \cap \Gamma = \varnothing$，那么 $(\Omega + \Gamma)^{(n)} = \Omega^{(n)} + \Gamma^{(n)}$. 于是

$$\mu^*(\Omega + \Gamma) = \limsup_{n\to\infty} \frac{|\Omega^{(n)} + \Gamma^{(n)}|}{n}$$

$$\geqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{|\Gamma^{(n)}|}{n} + \liminf_{n\to\infty} \frac{|\Omega^{(n)}|}{n} = \mu_*(\Omega) + \mu^*(\Gamma).$$

其它情况类似可证.

显然，如果 $\Omega \subseteq \mathbf{N}$，则有

$$1 = \mu_*(\mathbf{N}) \leqslant \mu_*(\mathbf{N}) + \mu^*(\mathbf{N} \setminus \Omega) \leqslant \mu^*(\mathbf{N}) = 1.$$

另外，由性质 2.4.2 还可以得到下面两个推论：

推论 2.4.1 如果 $\Omega, \Gamma \subseteq \mathbf{N}$，且 $\Omega \subseteq \Gamma$ 则

$$\mu^*(\Gamma) - \mu^*(\Omega) \leqslant \mu^*\left(\frac{\Gamma}{\Omega}\right) \leqslant \mu^*(\Gamma) - \mu_*(\Omega),$$

$$\mu_*(\Gamma) - \mu^*(\Omega) \leqslant \mu_*\left(\frac{\Gamma}{\Omega}\right) \leqslant \mu_*(\Gamma) - \mu_*(\Omega).$$

推论 2.4.2 如果 $\Omega, \Gamma \subseteq \mathbf{N}$，则

$$\mu_*(\Omega) + \mu^*(\Gamma) - \mu^*(\Omega \cap \Gamma) \leqslant \mu^*(\Omega + \Gamma)$$

$$\leqslant \mu^*(\Omega) + \mu^*(\Gamma) - \mu_*(\Omega \cap \Gamma),$$

$$\mu_*(\Omega) + \mu_*(\Gamma) - \mu^*(\Omega \cap \Gamma) \leqslant \mu_*(\Omega + \Gamma)$$

$$\leqslant \mu_*(\Omega) + \mu^*(\Gamma) - \mu_*(\Omega \cap \Gamma).$$

性质 2.4.3 如果 $\Omega, \Gamma \subseteq \mathbf{N}$,使得 $\mu^*(\Omega) + \mu_*(\Gamma) > 1$,那么 $\Omega \cap \Gamma$不是有限集.

事实上,如果 $\Omega \cap \Gamma$ 有限,有 $\mu^*(\Omega \cap \Gamma) = 0$ 且 $\Omega \subseteq (\mathbf{N} \setminus \Gamma) \cup (\Omega \cap \Gamma)$,则有

$$\mu^* \leqslant \mu^*(\mathbf{N} \setminus \Gamma) + \mu^*(\Omega \cap \Gamma) = \mu^*(\mathbf{N} \setminus \Gamma),$$

由性质 2.4.2 可知

$$1 < \mu^*(\Omega) + \mu^*(\Gamma) \leqslant \mu^*(\mathbf{N} \setminus \Gamma) + \mu_*(\Gamma) = 1.$$

这是一个矛盾.

性质 2.4.4 如果 $\Omega \subseteq \mathbf{N}$,则有

$$\mu^*(\sigma_\alpha^\beta(\Omega)) \leqslant (\beta - \alpha + 1)\mu^*(\Omega),$$

$$\mu_*(\sigma_\alpha^\beta(\Omega)) \leqslant (\beta - \alpha + 1)\mu_*(\Omega).$$

证明 由性质 2.4.2 可知

$$|(\sigma_\alpha^\beta(\Omega))^{(n)}| \leqslant (\beta - \alpha + 1)|(\Omega)^{(n)}| + \beta - \alpha.$$

因此有

$$\mu_*(\sigma_\alpha^\beta(\Omega)) \leqslant \liminf_{n \to \infty} \frac{(\beta - \alpha + 1)|(\Omega)^{(n)}| + \beta - \alpha}{n}$$

$$= (\beta - \alpha + 1)\mu_*(\Omega).$$

另一不等式类似可证.

最后,我们将考虑差分方程

$$\Delta x_n + p_n x_{n-\tau} = 0, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{2.4.2}$$

的振动性,其中 $\tau > 0$.

定理 2.4.1 设有正数 c 及非负数 ω 使得

$$\mu^*(p < c) = a \geqslant 0,$$

$$\mu_*(p > 1 - c) > (2\tau + 3)(a + \omega).$$

那么方程(2.4.2)的每一个解是上度 ω 一致振动的,它也是下度 ω 一致振动的.

证明 设 $x = \{x_n\}$ 是方程(2.4.2)的上度 ω 几乎最终正解,因此

$\mu^*(x\leqslant 0)\leqslant\omega$. 由性质 2.4.2 和 2.4.4 可知

$$\begin{aligned}1 &\leqslant \mu^*(\mathbf{N}\setminus\sigma_{-2}^{2\tau}(p<c\text{ 或 }x\leqslant 0))+\mu_*(\sigma_{-2}^{2\tau}(p<c\text{ 或 }x\leqslant 0))\\ &\leqslant \mu^*(\mathbf{N}\setminus\sigma_{-2}^{2\tau}(p<c\text{ 或 }x\leqslant 0))+(2\tau+3)(a+\omega)\\ &< \mu^*(\mathbf{N}\setminus\sigma_{-2}^{2\tau}(p<c\text{ 或 }x\leqslant 0))+\mu_*(p>1-c).\end{aligned}$$

由性质 2.4.3 可知

$$(\mathbf{N}\setminus\sigma_{-2}^{2\tau}(p<c\text{ 或 }x\leqslant 0))\cap(p>1-c)$$

是 $\mathbf{N}$ 中的无限集. 由(2.4.1)知存在自然数 n 使得 $n-2\tau\geqslant 1$, $p_n>1-c$ 且

$$p_i\geqslant c,\quad x_i>0,\quad n-2\tau\leqslant i\leqslant n+2.$$

由方程(2.4.2)有 $n-\tau\leqslant i\leqslant n+2+\tau$ 时 $\Delta x_i\leqslant 0$. 因此

$$x_{n-\tau}\geqslant x_{n-1-\tau}\geqslant x_n.$$

从而

$$0=x_{n+1}-x_n+p_nx_{n-\tau}\geqslant x_{n+1}-x_n+p_nx_n=x_{n+1}+(p_n-1)x_n,$$

$$x_{n+1}=x_{n+2}+p_{n+1}x_{n+1-\tau}\geqslant cx_{n+1-\tau}\geqslant cx_n,$$

因此, $0\geqslant(c+p_n-1)x_n$. 这是一个矛盾.

如果 $x=\{x_n\}$ 是方程(2.4.2)的下度 ω 几乎最终负解, 则有 $\mu_*(x\leqslant 0)\leqslant\omega$. 那么

$$\begin{aligned}&\mu_*(\sigma_{-2}^{2\tau}(p<c\text{ 或 }x\leqslant 0))\\ &=\mu_*(\sigma_{-2}^{2\tau}(p<c)+\sigma_{-2}^{2\tau}(x\leqslant 0))\\ &\leqslant\mu^*(\sigma_{-2}^{2\tau}(p<c))+\mu_*(\sigma_{-2}^{2\tau}(x\leqslant 0))\\ &\leqslant(2\tau+3)\mu^*(p<c)+(2\tau+3)\mu_*(x\leqslant 0)\\ &\leqslant(2\tau+3)(a+\omega),\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\mu^*(\mathbf{N}\setminus\sigma_{-2}^{2\tau}(p<c\text{ 或 }x\leqslant 0))&=1-\mu_*(\sigma_{-2}^{2\tau}(p<c\text{ 或 }x\leqslant 0))\\ &\geqslant 1-(2\tau+3)(a+\omega)>1-\mu_*(p>1-c).\end{aligned}$$

从而可知

$$(\mathbf{N}(\sigma_2^{2\tau}(p < c \text{ 或} x \leqslant 0))) \cap (p > 1 - c)$$

是无限集. 以下的证明类似前半部分. 省略.

类似定理 2.4.1,我们还可以得到如下两个结果.

定理 2.4.2 设有正数 c 及非负数 ω 使得

$$\mu_*(p < c) = a \geqslant 0,$$
$$\mu_*(p > 1 - c) > (2\tau + 3)(a + \omega)$$

则方程(2.4.2)的每一个解是上度 ω 一致振动的.

定理 2.4.3 设有正数 c 及非负数 ω 使得

$$\mu^*(p < c) = a \geqslant 0,$$
$$\mu^*(p > 1 - c) > (2\tau + 3)(a + \omega),$$

则方程(2.4.2)的每一个解是上度 ω 一致振动的.

例 2.4.4 在方程(2.4.2)中取

$$\tau = 1, \quad p_n = \begin{cases} \dfrac{1}{8}, n = 2^k, k \in \mathbf{N}, \\ \dfrac{3}{4}, n \neq 2^k, k \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

令 $c = \dfrac{1}{3}$, $0 \leqslant \omega < \dfrac{1}{5}$,那么

$$\mu^*\left(p < \frac{1}{3}\right) = 0, \quad \mu_*\left(p > \frac{2}{3}\right) = 1 > 5\omega,$$

因此,方程(2.4.2)是上度一致振动的,它也是振动的.

定理 2.4.4 设有正数 c 使得

$$\mu_*(p < c) = a \geqslant 0,$$
$$\mu_*(p \leqslant 1 - c) = b \geqslant 0,$$
$$\mu_*(p < c \text{ 或} p \leqslant 1 - c) > a + b - \frac{1}{2\tau + 3},$$

则方程(2.4.2)振动.

证明 设 $\{x_n\}$ 是方程(2.4.2)的一个最终正解,并设 $n \geqslant M - 2\tau$ 时 $x_n > 0$. 由推论 2.4.2 可知

$$
\begin{aligned}
&\mu^*(\mathbf{N}\setminus\sigma_{-2}^{2\tau}(p<c\ \text{或}\ p\leqslant 1-c))\\
&=1-\mu_*(\sigma_{-2}^{2\tau}(p<c\ \text{或}\ p\leqslant 1-c))\\
&\geqslant 1-(2\tau+3)\mu_*(p<c\ \text{或}\ p\leqslant 1-c)\\
&\geqslant 1-(2\tau+3)(\mu^*(p<c)+\mu_*(p\leqslant 1-c)\\
&\quad -\mu_*(p<c,p\leqslant 1-c))\\
&>1-(2\tau+3)\left(a+b-(a+b-\frac{1}{2\tau+3})\right)=0.
\end{aligned}
$$

因此 $\mathbf{N}\setminus\sigma_{-2}^{2\tau}(p<c$ 或 $p\leqslant 1-c)$是无限集.由(2.4.1)知有 $n\geqslant M$ 使得 $n-2\tau\leqslant i\leqslant n+2$ 时 $p_i\geqslant c,p_i<1-c$.

由(2.4.2)可知 $n-\tau\leqslant i\leqslant n+2$ 时 $\Delta x_i\leqslant 0$.因此有

$$x_{n-\tau}\geqslant x_{n-\tau+1}\geqslant\cdots\geqslant x_n\geqslant x_{n+1}.$$

从而有

$$0=x_{n+1}-x_n+p_nx_{n-\tau}\geqslant x_{n+1}-x_n+p_nx_n,$$

$$x_{n+1}=x_{n+2}+p_{n+1}x_{n+1-\tau}\geqslant p_{n+1}x_{n+1-\tau}\geqslant cx_n,$$

因此,$0\geqslant(c-1+p_n)x_n$.这是一个矛盾.

类似地,我们也有下面结论.

定理 2.4.5　设有正数 c 使得

$$\mu_*(p<c)=a\geqslant 0,$$

$$\mu^*(p\leqslant 1-c)=b\geqslant 0,$$

$$\mu_*(p<c,p\leqslant 1-c)>a+b-\frac{1}{2\tau+3},$$

则方程(2.4.2)振动.

例 2.4.5　在方程(2.4.2)中取

$$\tau=1,\quad p_n=\begin{cases}-\dfrac{1}{3}, & n=6k,\\[2mm] \dfrac{2}{3}, & n\neq 6k,k\in\mathbf{N}.\end{cases}$$

令 $c=\dfrac{1}{2}$,那么

$$\mu_*\left(p<\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{6},$$

$$\mu^*\left(p\leqslant\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{6},$$

$$\mu_*\left(p<\frac{1}{2}\text{ 或 }p\leqslant\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{6}.$$

满足定理 2.4.4 的所有条件,因此,这时的方程(2.4.2)是振动的.

§2.5 线性化振动

考虑非线性差分方程

$$\Delta x_n+\sum_{i=1}^{m}p_if_i(x_{n-k_i})=0,\quad n=0,1\cdots \tag{2.5.1}$$

与其线性化方程

$$\Delta x_n+\sum_{i=1}^{m}p_ix_{n-k_i}=0,\quad n=0,1\cdots, \tag{2.5.2}$$

其中 $i=1,2,\cdots,m,k_i$ 是非负整数,且 $\max\{k_1,\cdots,k_m\}>0$,

$$p_i\in(0,\infty), \tag{2.5.3}$$

$$f_i\in C(\mathbf{R},\mathbf{R}),\ \exists\,\alpha>0,\ uf_i(u)>0\ (u\neq 0),u\in(-\alpha,\alpha) \tag{2.5.4}$$

$$\lim_{u\to 0}\frac{f_i(u)}{u}=1. \tag{2.5.5}$$

定理 2.5.1 在条件(2.5.3),(2.5.4)和(2.5.5)成立的情况下,方程(2.5.1)与其线性化方程(2.5.5)在振动性上等价.

为了证明定理 2.5.1,先看几个引理.

引理 2.5.1 设有 $N^*\geqslant 0,\delta>0$ 使得

$$n\geqslant N^*,\quad u_1,u_2,\cdots,u_m\in[0,\delta],(u_1,u_2,\cdots,u_m)\neq 0$$

时有 $f(n,u_1,u_2,\cdots,u_m)>0$, $i=1,2,\cdots,m$, $u'_i\leqslant u''_i$ 时 $f(n,u'_1,u'_2,\cdots,u'_m)\leqslant f(n,u''_1,u''_2,\cdots,u''_m)$ 成立,方程

$$\Delta x_n + f(n, x_{n-k_1}, \cdots, x_{n-k_m}) \leqslant 0 \qquad (2.5.6)$$

有正解$\{x_n^*\}$，使得$x_n^* \leqslant \delta$成立.那么方程

$$\Delta x_n + f(n, x_{n-k_1}, \cdots, x_{n-k_m}) = 0 \qquad (2.5.7)$$

有正解$\{x_n\}$，使得$x_n \leqslant x_n^*$对所有大n成立.

证明　令$N = N^* + k$，那么当$n \geqslant N - k$时$\{x_n^*\}$严格减少，且

$$\lim_{n\to\infty} x_n^* = l \in [0, \infty).$$

对方程(2.5.6)求和可知

$$l + \sum_{j=1}^{\infty} f(j, x_{j-k}^*, \cdots, x_{j-k_m}^*) \leqslant x_n^*, \quad n \geqslant N$$

令

$$\Omega = \{\{y_n\} : 0 \leqslant y_n \leqslant x_n^*, n \geqslant N\}$$

且对任意的$\{y_n\} \in \Omega$，定义$\{Y_n\}_{n=N-k}^{\infty}$如下：

$$Y_n = \begin{cases} y_n, & n \geqslant N, \\ y_N + x_n^* - x_N^*, & N - k \leqslant n < N. \end{cases}$$

显然，当$n \geqslant N - k$时有$0 \leqslant Y_n \leqslant x_n^*$，且当$N - k \leqslant n < N$时有$Y_n > 0$.按照如下方式在$\Omega$上定义算子$T$：

$$Ty_n = l + \sum_{j=n}^{\infty} f(j, Y_{j-k_1}, \cdots, Y_{j-k_m}), \quad n \geqslant N.$$

由f的单调性自然当$\{y'_n\}, \{y''_n\} \in \Omega$满足$y'_n \leqslant y''_n$时，有$Ty'_n \leqslant Ty''_n$.同时当$\{y_n\} \in \Omega$时，有$Ty_n \leqslant Tx_n^* \leqslant x_n^*$.考虑序列：

$$\{x_n^{(0)}\} = \{x_n^*\}, \quad \{x_n^{(i)}\} = \{Tx_n^{(i-1)}\}, \qquad i = 1, 2, \cdots.$$

由归纳法可知，当$n \geqslant N$时

$$0 \leqslant x_n^{(i+1)} \leqslant x_n^{(i)} \leqslant x_n^*, \quad i = 1, 2, \cdots.$$

因此有

$$x_n = \lim_{i\to\infty} x_n^{(i)}, \quad n \geqslant N$$

存在且$\{x_n\} \in \Omega$，同时满足

$$x_n = l + \sum_{j=n}^{\infty} f(j, x_{j-k_1}, \cdots, x_{j-k_m}), \quad n \geqslant N.$$

即$\{x_n\}$是方程(2.5.7)的非负解. 下证当 $n \geqslant N$ 时 $x_n > 0$.

如果 $l > 0$,结论显然成立. 如果 $l = 0$ 且有 N^* 存在,使得当 $N - k \leqslant n < N^*$ 时,$x_n > 0$,$x_{N^*} = 0$,那么

$$0 = x_{N^*} = \sum_{j=N^*}^{\infty} f(j, x_{j-k_1}, \cdots, x_{j-k_m}) > 0.$$

这是一个矛盾. 证毕.

由引理 2.5.1,我们自然可以得到结论:

方程(2.5.2)振动的充要条件是

$$\Delta x_n + \sum_{i=1}^{m} p_i x_{n-k_i} \leqslant 0 \tag{2.5.8}$$

无最终正解.

另外,由定理 2.1.1 也可得到结论:

方程(2.5.2)振动的充要条件是

$$\lambda - 1 + \sum_{i=1}^{m} p_i \lambda^{-k_i} = 0 \tag{2.5.9}$$

无正根.

引理 2.5.2 定理 2.5.1 的条件均成立,若方程

$$\Delta x_n + (1 - \varepsilon) \sum_{i=1}^{m} p_i x_{n-k_i} = 0 \tag{2.5.10}$$

振动,则方程(2.5.1)振动;若方程

$$\Delta x_n + (1 + \varepsilon) \sum_{i=1}^{m} p_i x_{n-k_i} = 0 \tag{2.5.11}$$

有非振动解,则方程(2.5.1)有非振动解.

证明 由(2.5.5)知,存在 $\delta > 0$ 使得 $u \in (0, \delta)$ 时

$$(1 - \varepsilon) u \leqslant f_i(u) \leqslant (1 + \varepsilon), \quad i = 1, 2, \cdots.$$

类似引理 2.5.1 的证明可知结论成立.

引理 2.5.3 若方程(2.5.9)无正根,则有 $0<\varepsilon_0<1$ 使得当 $|\varepsilon|<\varepsilon_0$时,方程

$$\lambda-1+(1-\varepsilon)\sum_{i=1}^{m}p_i\lambda^{-k_i}=0 \tag{2.5.12}$$

也无正根.

证明 令 $F(\lambda)=\lambda-1+\sum_{i=n}^{m}p_i\lambda^{-k}$. 由于方程(2.5.9)无正根,故易知当 $\lambda>0$ 时,$F(\lambda)>0$ 且 $h=\min_{\lambda>0}F(\lambda)$存在并且为正. 设 $F(\lambda_0)=h$,于是有

$$\lambda-1+\sum_{i=1}^{m}p_i\lambda^{-k_i}\geqslant F(\lambda_0)=h,\quad \lambda>0.$$

做关于 ε,λ 的二元函数

$$G(\varepsilon,\lambda)=\lambda-1+(1-\varepsilon)\sum_{i=1}^{m}p_i\lambda^{-k_i},\quad \varepsilon\in(-1,1),\lambda>0.$$

显然 $G'_\lambda(0,\lambda_0)=0$. 由隐函数存在定理,在 $\varepsilon=0$ 的某邻域内存在的连续函数 $\lambda=\lambda(\varepsilon)$,使得$\lim\limits_{\varepsilon\to0}\lambda(\varepsilon)=\lambda_0$. 从而有

$$\lim_{\varepsilon\to0}\left[\lambda(\varepsilon)-1+(1-\varepsilon)\sum_{i=1}^{m}p_i\lambda(\varepsilon)^{-k_i}\right]=\lambda_0-1+\sum_{i=1}^{m}p_i\lambda_0^{-k_i}=h.$$

因此有 $0<\varepsilon_0<1$,使得当 $|\varepsilon|<\varepsilon_0$ 时

$$\lambda(\varepsilon)-1+(1-\varepsilon)\sum_{i=1}^{m}p_i\lambda(\varepsilon)^{-k_i}\geqslant\frac{h}{2}.$$

即当 $|\varepsilon|<\varepsilon_0$ 时方程(2.5.12)无正根.

定理 2.5.1 的证明:若方程(2.5.2)振动,则方程(2.5.9)无正根,由引理 2.5.3 可知,方程(2.5.12)无正根. 这样一来,再由引理 2.5.2 可知方程(2.5.1)振动.

如果方程(2.5.2)有一个最终正解,则方程(2.5.9)有一正根. 这时候必有 $0<\varepsilon_0<1$ 使得当 $|\varepsilon|<\varepsilon_0$ 时

$$\lambda-1+(1+\varepsilon)\sum_{i=1}^{m}p_i\lambda^{-k_i}=0$$

有正根.即方程(2.5.11)有最终正解.由引理 2.5.2 可知方程(2.5.1)有最终正解.证毕.

定理 2.5.2 如果对 $a, b>0$,

$$c_n = \min_{u_1,\cdots,u_m \in [a,b]} |f(n, u_1, \cdots, u_m)|,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \infty, \tag{2.5.13}$$

且有正数 δ 和非负数列 $\{p_1(n)\}, \cdots, \{p_m(n)\}$,使得

$$\begin{cases} f(n, u_1, \cdots, u_m) \geqslant \sum_{i=1}^{m} p_i(n) u_i > 0, & 0 < u_1, \cdots, u_m \leqslant \delta, \\ f(n, u_1, \cdots, u_m) \leqslant \sum_{i=1}^{m} p_i(n) u_i > 0, & 0 > u_1, \cdots, u_m \geqslant -\delta. \end{cases} \tag{2.5.14}$$

若方程

$$\Delta x_n + \sum_{i-11}^{m} p_i(n) x_{n-k_i} = 0 \tag{2.5.15}$$

振动,则方程(2.5.7)振动.

证明 设方程(2.5.7)有一个最终正解,则存在 $N \geqslant 0$,使得当 $n \geqslant N$ 时,$x_{n-k} > 0$.于是由方程(2.5.7)可知当 $n \geqslant N$ 时 $\{x_n\}$ 是单调减少的.从而有 $\lim_{n\to\infty} x_n = l \in [0, \infty)$.对(2.5.7)求和有

$$l - x_N + \sum_{j=N}^{\infty} f(j, x_{j-k_1}, \cdots, x_{j-k_m}) = 0.$$

这与(2.5.13)式矛盾.因此 $l=0$.于是由(2.5.14)及方程(2.5.7)有

$$\Delta x_n + \sum_{i=1}^{m} p_i(n) x_{n-k_i} \leqslant 0. \tag{2.5.16}$$

再利用引理 2.5.1 可知,方程(2.5.7)有一个最终正解.矛盾.证毕.

由定理 2.5.2 的证明过程显然可得下面结论:

定理 2.5.3 如果对任意的正数 $\delta>0$ 有(2.5.14)成立,且方程(2.5.15)振动,则方程(2.5.7)振动.

事实上,类似定理2.5.2的证明必有$\lim_{n\to\infty}x_n=l\in[0,\infty)$.这样一来,由方程(2.5.7)可知(2.5.16)式成立.由引理2.5.1可知方程(2.5.15)有一个最终正解.

定理2.5.4 设有正数δ及非负数列$\{p_1(n)\},\cdots,\{p_m(n)\}$,使得

$$0<f(n,u_1,\cdots,u_m)\leqslant\sum_{i=1}^{m}p_i(n)u_i,\quad 0<u_1,\cdots,u_m\leqslant\delta,$$

且f关于$u_1,\cdots,u_m$为非减函数.如果方程(2.5.15)有一个最终正解,则方程(2.5.7)有一个最终正解.

证明 设$\{y'_n\}$是方程(2.5.15)的一个最终正解,则存在N使得当$n\geqslant N$时$y'_{n-k}>0$,于是由方程(2.5.7)可知,当$n\geqslant N$时$\{y'_n\}$是非增数列.从而有$\{y'_n\}$有界.令M足够大使得

$$y_n=\frac{y'_n}{M}\leqslant\delta,\quad n\geqslant N.$$

显然,$\{y_n\}$也是方程(2.5.15)的一个解,这样,由(2.5.17)可知

$$\Delta y_n+f(n,y_{n-k_1},\cdots,y_{n-k_m})\leqslant 0,\quad n\geqslant N.$$

由引理2.5.1可知结论成立.证毕.

由定理2.5.2和定理2.5.4显然有如下结果.

定理2.5.5 对于差分方程

$$\Delta x_n+\sum_{i=1}^{m}p_i(n)f(x_{n-k_i})=0,\quad n=0,1,\cdots \qquad (2.5.18)$$

其中$i=1,2,\cdots,m$,$\{p_i(n)\}$是非负数列,$f_i\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$,当$u\neq0$时有$uf_i(u)>0$,且(2.5.5)式成立,设

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{n=0}^{\infty}p_i(n)=\infty,\quad \sum_{i=1}^{m}p_i(n)k_i>0 \qquad (2.5.19)$$

有正数δ使得或者有

$$0<u<\delta,\quad f_i(u)\leqslant u,\quad f_i\ \text{单调增加}$$

或者有

$$0 > u > -\delta,\quad f_i(u) \geqslant u,\quad f_i \text{ 单调增加}.$$

那么方程(2.5.18)振动的充要条件是方程(2.5.15)振动.

注意,定理2.5.5 当 $p_i(n)$变成常数时也不同于定理2.5.1.定理2.5.1 并不要求 f_i 的单调性.

最后,作为应用我们考虑离散 Logistic 方程

$$x_{n+1} = x_n\Big[A(n) - \sum_{i=0}^{m} B_i(n)x_{n-i}\Big], \tag{2.5.20}$$

其中 $\{A(n)\}$, $\{B_1(n)\}$, $\cdots$, $\{B_m(n)\}$ 是正数列, $\{x_n^*\}$ 是方程(2.5.20)固定的正解,如果方程(2.5.20)的任一正解 $\{x_n\}$使得 $\{x_n - x_n^*\}$振动,称方程(2.5.20)关于 $\{x_n^*\}$振动.

定理 2.5.6 设 $\{x_n^*\}$是方程(2.5.20)的一个正解,且有

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x_n^*}{x_{n+1}^*}B_i(n)x_{n-i}^* = \infty. \tag{2.5.21}$$

那么方程(2.5.20)的每一个正解关于 $\{x_n^*\}$振动的充要条件是方程

$$\Delta y_n + \frac{x_n^*}{x_{n+1}^*}\sum_{i=0}^{m} B_i(n)x_{n-i}^* y_{n-i} = 0 \tag{2.5.22}$$

振动.

证明 令 $x_n = x_n^* e^{z_n}$,那么方程(2.5.20)变为

$$\Delta z_n - \ln\frac{x_n^*}{x_{n+1}^*}\Big[A(n) - \sum_{i=0}^{m} B_i(n)x_{n-i}^* e^{z_{n-i}}\Big] = 0. \tag{2.5.23}$$

显然,方程(2.5.20)关于 $\{x_n^*\}$振动当且仅当方程(2.5.23)振动.
令

$$f(n, u_0, \cdots, u_m) = -\ln\frac{x_n^*}{x_{n+1}^*}\Big[A(n) - \sum_{i=0}^{m} B_i(n)x_{n-i}^* e^{u_i}\Big],$$

$$g(n, u_0, \cdots, u_m) = f(n, u_0, \cdots, u_m) = -\frac{x_n^*}{x_{n+1}^*}\sum_{i=0}^{m} B_i(n)x_{n-i}^* u_i.$$

因为 $\{x_n^*\}$满足方程(2.5.20),因此有

$$\frac{\partial g}{\partial u_j} = \frac{B_j(n)x_{n-j}^* e^{u_j}}{A(n) - \sum_{i=0}^{m} B_i(n)x_{n-i}^* e^{u_i}} - \frac{x_n^*}{x_{n+1}^*} B_j(n)x_{n-j}^*$$

$$= \frac{B_j(n)x_{n-j}^* e^{u_j}}{A(n) - \sum_{i=0}^{m} B_i(n)x_{n-i}^* e^{u_i}} - \frac{B_j(n)x_{n-j}^*}{A(n) - \sum_{i=0}^{m} B_i(n)x_{n-i}^*}.$$

显然

$$\frac{\partial g}{\partial u_j} < 0, \quad u_0, u_1, \cdots, u_m < 0,$$

且

$$g(n, 0, \cdots, 0) \equiv 0,$$

$$0 > f(n, u_0, \cdots, u_m) \geqslant \frac{x_n^*}{x_{n+1}^*} \sum_{i=0}^{m} B_i(n)x_{n-i}^* u_i, \quad u_0, \cdots, u_m < 0.$$

$$\frac{\partial f(n, u_0, \cdots, u_m)}{\partial u_j} = \frac{B_j(n)x_{n-j}^* e^{u_j}}{A(n) - \sum_{i=0}^{m} B_i(n)x_{n-i}^* e^{u_i}} > 0, \quad u_0, \cdots, u_m < 0$$

$$\frac{\partial f(n, 0, \cdots, 0)}{\partial u_j} = \frac{B_j(n)x_{n-j}^*}{A(n) - \sum_{i=0}^{m} B_i(n)x_{n-i}^*}$$

$$= \frac{x_n^*}{x_{n+1}^*} B_j(n)x_{n-j}^*, \quad u_0, \cdots, u_m < 0.$$

且

$$\lim_{(u_0, \cdots, u_m) \to 0} \frac{f(n, u_0, \cdots, u_m)}{\frac{x_n^*}{x_{n+1}^*} \sum_{i=0}^{m} B_i(n)x_{n-i}^* u_i} = 1.$$

这样一来，由定理 2.5.2 和定理 2.5.4 可知结论成立．证毕．

考虑方程

$$x_{n+1} = Ax_n\left(1 - \sum_{i=0}^{m} B_i x_{n-i}\right), \tag{2.5.24}$$

其中 $A\in(1,\infty)$, $B_i\in(0,\infty)$, m 是非负整数, $i=0,1,\cdots,m$, 这时, $x^*=\dfrac{A-1}{A\sum\limits_{i=0}^{m}B_i}$ 是方程(2.5.24)的解. 因此由定理2.5.6可知

推论 2.5.1 方程(2.5.24)关于 x^* 振动的充要条件是方程

$$\Delta y_n+Ax^*\sum_{i=0}^{m}B_iy_{n-i}=0$$

振动.

§2.6 非线性差分方程的振动性

这节中将考虑非线性差分分不等式

$$\Delta x_n+a(n)x_n+\sum_{i=1}^{k}p_i(n)\prod_{j=1}^{m_i}|x_{n-\tau_{ij}(n)}|^{\alpha_{ij}}\operatorname{sgn}x_{n-\tau_{ij}(n)}\leqslant 0,\quad n=0,1,\cdots,\tag{2.6.1}$$

其中将引用条件

(H_1): $\{a(n)\}_{n=0}^{\infty}$是实数列,

(H_2): $\{p_1(n)\}_{n=0}^{\infty},\cdots,\{p_k(n)\}_{n=0}^{\infty}$是非负数列,

(H_3): $\alpha_{11},\cdots,\alpha_{km_k}$是正数且有

$$\sum_{j=1}^{m_i}\alpha_{ij}=1,\quad i=1,\cdots,k,$$

(H_4): $\tau_{11}(n),\cdots,\tau_{km_k}(n)$是定义在 $n\geqslant 0$ 上的非负整数函数,并满足

$$\tau_{ij}(n)\geqslant 0,\quad \lim_{n\to\infty}(n-\tau_{ij}(n))=\infty,\quad 1\leqslant i\leqslant k,1\leqslant j\leqslant m_k,$$

(H_5): $\tau^*=\sup\{\tau_{ij}(n)\mid 1\leqslant i\leqslant k,1\leqslant j\leqslant m_k,n\geqslant 0\}$. 是一非负整数.

方程(2.6.1)的一个解是实数列 $\{x_n\}_{n=-\tau^*}^{\infty}$, 且当 $n\geqslant 0$ 时满足(2.6.1)式,如此的一个解当 $x_n\leqslant 1$ 最终成立时,称其是最终Subnor-

mal;而当 $x_n<1$ 最终成立时,称其是最终严格 Subnormal.

设$\{x_n\}$是方程(2.6.1)的一个最终正解,那么存在 $N\geq\tau^*$ 使得当 $n\geq N-\tau^*$ 时,$x_n>0$.令

$$\omega_n=-\frac{\Delta x_n}{x_n},\quad n\geq N-\tau^*,$$

那么

$$0<\frac{x_{n+1}}{x_n}=1-\omega_n,\quad n\geq N-\tau^*.$$

即$\{\omega_n\}$是最终严格 Subnormal 且

$$\frac{x_n}{x_{n-\tau_{ij}(n)}}=(1-\omega_{n-1})\cdots(1-\omega_{n-\tau_{ij}(n)}),\quad n\geq N.$$

代入方程(2.6.1)中,则有

$$\omega_n\geq a(n)+\sum_{i=1}^{k}p_i(n)\prod_{j=1}^{m_i}\prod_{s=n-\tau_{ij}(n)}^{n-1}\frac{1}{(1-\omega_s)^{\alpha_{ij}}},\quad n\geq N.\tag{2.6.2}$$

定理 2.6.1 若方程(2.6.1)有一个最终正解,则方程(2.6.2)有一个最终不小于$\{a(n)\}$的严格 Subnormal 解.逆命题也成立.

证明 如果(ω_n)是方程(2.6.2)的一个最终不小于$\{a(n)\}$的严格 Subnormal 解,则存在 N.使得当 $n\geq N-\tau^*$ 时,$a(n)\leq\omega_n<1$.令 $x_N=1$,

$$x_{n+1}=\prod_{i=N}^{n}(1-\omega_i),\quad n\geq N.$$

它是方程(2.6.1)的一个最终正解.

N 是不小于 τ^* 的整数,定义 $\omega_n^{(0)}=a(n),n\geq 0$,

$$\omega_n^{(t+1)}=a(n)+\sum_{i=1}^{k}p_i(n)\prod_{j=1}^{m_i}\prod_{s=n-\tau_{ij}(n)}^{n-1}\frac{1}{(1-\omega_s^{(t)})^{\alpha_{ij}}}\quad n\geq N,\tag{2.6.3}$$

$$\omega_n^{(t+1)} = \omega_n^{(t)}, \qquad n < N.$$

为方便起见,我们称方程(2.6.3)是方程(2.6.1)的伴随关系.

定理 2.6.2 方程(2.6.2)有一个解$\{\omega_n\}$使得$a(n) \leqslant \omega_n < 1$, $n \geqslant N - \tau^* > 0$,当且仅当方程(2.6.1)的伴随关系的每一项$\{\omega^{(t)}\}$满足:$a(n) \leqslant \omega^{(t)} < 1, n \geqslant N$,且收敛一个最终严格 Subnormal 数列.

证明 设$\{\omega_n\}$是方程(2.6.2)的一个解且满足$a(n) \leqslant \omega_n < 1$, $n \geqslant N - \tau^* \geqslant 0$,方程(2.6.1)的伴随关系满足

$$a(n) = \omega_n^{(0)} \leqslant \omega_n < 1, \quad n \geqslant N - \tau^*.$$

同时

$$\frac{1}{(1-\omega_s^{(0)})^{\alpha_{ij}}} \leqslant \frac{1}{(1-\omega_s)^{\alpha_{ij}}}, \quad s \geqslant N - \tau^*.$$

于是

$$\begin{aligned}\omega_n^{(0)} = a(n) &\leqslant a(n) + \sum_{i=1}^{k} p_i(n) \prod_{j=1}^{m_i} \prod_{s=n-\tau_{ij}(n)}^{n-1} \frac{1}{(1-\omega_s^{(0)})^{\alpha_{ij}}} = \omega_n^{(1)} \\ &\leqslant a(n) + \sum_{i=1}^{k} p_i(n) \prod_{j=1}^{m_i} \prod_{s=n-\tau_{ij}(n)}^{n-1} \frac{1}{(1-\omega_s)^{\alpha_{ij}}} \leqslant \omega_n, \quad n \geqslant N.\end{aligned}$$

类似地,有

$$\begin{aligned}\omega_n^{(1)} &= a(n) + \sum_{i=1}^{k} p_i(n) \prod_{j=1}^{m_i} \prod_{s=n-\tau_{ij}(n)}^{n-1} \frac{1}{(1-\omega_s^{(0)})^{\alpha_{ij}}} \\ &\leqslant a(n) + \sum_{i=1}^{k} p_i(n) \prod_{j=1}^{m_i} \prod_{s=n-\tau_{ij}(n)}^{n-1} \frac{1}{(1-\omega_s^{(1)})^{\alpha_{ij}}} = \omega_n^{(2)} \leqslant \omega_n.\end{aligned}$$

由归纳法可知

$$\omega_n^{(0)} \leqslant \omega_n^{(1)} \leqslant \cdots \leqslant \omega_n < 1, \quad n \geqslant N.$$

相反,如果每一个$\omega_n^{(t)}$是严格 Subnormal 且$\{\omega_n^{(t)}\}$逐点收敛于$\{u_n\}$, $n \geqslant N$.由前面的证明可知

$$\omega_n^{(0)} \leqslant \omega_n^{(1)} \leqslant \cdots \leqslant u_n < 1, \quad n \geqslant N.$$

由 Lebesque 定理对(2.6.3)式两边取极限,则有

$$u_n = a(n) + \sum_{i=1}^{k} p_i(n) \prod_{j=1}^{m_i} \prod_{s=n-\tau_{ij}(n)}^{n-1} \frac{1}{(1-u_s)^{\alpha_{ij}}}, \quad n \geqslant N. \tag{2.6.4}$$

证毕.

由定理 2.6.1 和定理 2.6.2 我们有

定理 2.6.3 方程(2.6.1)有一个最终正解,当且仅当方程

$$\Delta x_n + a(n)x_n + \sum_{i=1}^{k} p_i(n) \prod_{j=1}^{m_i} |x_{n-\tau_{ij}(n)}|^{\alpha_{ij}} \operatorname{sgn} x_{n-\tau_{ij}(n)} = 0 \tag{2.6.5}$$

有一个最终正解.

在方程(2.6.1)中,如果 $a(n) \equiv a$, $p_i(n) \equiv p_i > 0$, $\tau_{ij}(n) \equiv \tau_{ij}$,那么方程(2.6.1)变为

$$\Delta x_n + a x_n + \sum_{i=1}^{k} p_i(n) \prod_{j=1}^{m_i} |x_{n-\tau_{ij}(n)}|^{\alpha_{ij}} \operatorname{sgn} x_{n-\tau_{ij}(n)} \leqslant 0, \quad n \geqslant 0, \tag{2.6.6}$$

且对于足够大的 N, $\{\omega_n^{(0)}\}_{n=N}^{\infty}$ 变为 $\{a\}$; $\{\omega_n^{(0)}\}_{n=N}^{\infty}$ 变为常数列 $\{\omega^{(1)}\}$,且 $\omega^{(1)} = a + \lambda_1$,这里

$$\lambda_1 = \sum_{i=1}^{k} p(1-a)^{-\sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij}\tau_{ij}}.$$

由归纳法可定义, $\lambda_0 = 0$,

$$\lambda_{1+t} = \sum_{i=1}^{k} p_i (1 - a - \lambda_t)^{-\sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij}\tau_{ij}}, \quad t = 0,1,\cdots. \tag{2.6.7}$$

这时 $\{\omega_n^{(t)}\}_{n=N}^{\infty}$ 变成了常数列 $\{a + \lambda_t\}$, $t \geqslant 1$. 于是有如下结果.

定理 2.6.4 方程(2.6.6)有一个最终正解的充要条件是 $a < 1$,且由(2.6.7)式定义的序列 $\{\lambda_t\}$, $(\lambda_0 = 0)$ 满足

$$a+\lambda_1\leqslant a+\lambda_2\leqslant\cdots<1$$

且收敛于$(0,1-a)$.

因此,如果方程(2.6.6)有一个最终正解,对(2.6.7)式两边取极限可知,方程

$$\lambda=\sum_{i=1}^{k}p_i(1-a-\lambda)^{-\sum_{j=1}^{m_i}\alpha_{ij}\tau_{ij}}\qquad(2.6.8)$$

在$(0,1-a)$内有正根λ^*.相反如果方程(2.6.8)在$(0,1-a)$内有根λ^*,那么$a<1,\lambda_1>0$.同时有

$$0<\lambda_1=\sum_{i=1}^{k}p_i(1-a)^{-\sum_{j=1}^{m_i}\alpha_{ij}\tau_{ij}}$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{k}p_i(1-a-\lambda^*)^{-\sum_{j=1}^{m_i}\alpha_{ij}\tau_{ij}}=\lambda^*.$$

归纳可知$\lambda_t<\lambda^*,t\geqslant 2$.由$\{\omega^{(t)}\}$的单调性可推知$\{\lambda_t\}$也是单调的.于是$\{\lambda_t\}$在$(0,\lambda^*)$上收敛.因此,方程(2.6.6)有一个最终正解的充要条件是方程(2.6.8)在$(0,1-a)$内有根.

另一方面,由定理2.6.1可直接得到如下结果:

推论 2.6.1 如果有常数$\omega<1$和N存在,使得

$$\omega\geqslant a(n)+\sum_{i=1}^{k}p_i(n)(1-\omega)^{-\sum_{j=1}^{m_i}\alpha_{ij}\tau_{ij}(n)},\quad n\geqslant N,\qquad(2.6.9)$$

则方程(2.6.1)有一个最终正解.

因此,如果

$$a(n)=0,\quad\sum_{j=1}^{m_i}\alpha_{ij}\tau_{ij}(n)\equiv\tau>0,\quad 1\leqslant i\leqslant k,$$

$$\sum_{i=1}^{k}p_i(n)\leqslant\frac{\tau^\tau}{(1+\tau)^{\tau+1}},\quad n\geqslant N.$$

方程(2.6.1)有一个最终正解.

确实,这时(2.6.9)式满足

$$\sum_{i=1}^{k} p_i(n) \leqslant \max_{0<\omega<1} \omega(1-\omega)^{\tau} = \frac{\tau^{\tau}}{(1+\tau)^{\tau+1}},$$

$\left\{\dfrac{1}{1+\tau}\right\}$是方程(2.6.9)的一个严格 Subnormal 解.

再由定理2.6.1和定理2.6.2可得如下结果.

推论 2.6.2　如果对任意的 N,都有 $n\geqslant N$ 使得方程(2.6.1)的伴随关系对某一 $t\geqslant 0$ 有 $\omega_n^{(t)}\geqslant 1$,那么方程(2.6.1)无最终正解.

因此,如果对任意的 $N\geqslant\tau^*$,有 $n\geqslant N$ 使得 $\omega_n^{(0)}=a(n)\geqslant 1$ 或者

$$\omega_n^{(0)} = a(n) + \sum_{i=1}^{k} p_i(n) \prod_{j=1}^{m_i} \prod_{s=n-\tau_{ij}(n)}^{n-1} \frac{1}{(1-a(s))^{\alpha_{ij}}} \geqslant 1,$$

则方程(2.6.1)无最终正解.

定理 2.6.5　设有 $N\geqslant\tau^*$ 及常数 τ 和 a_* 存在,使得

$$\inf_{n\geqslant N-\tau^*} a(n) \geqslant a_* > -\infty,$$

$$0 \leqslant \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij}\tau_{ij}(n) \leqslant \tau, n \geqslant N-\tau^* > 0,\quad 1\leqslant i\leqslant k,$$

$$\inf_{n\geqslant N-\tau^*, 0<\mu<1-a_*} \left\{\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{k} p_i(n)(1-a_*-\mu)^{-\sum_{j=1}^{m_i}\alpha_{ij}\tau_{ij}(n)}\right\} > 1, \tag{2.6.10}$$

那么方程(2.6.1)无最终正解.

证明　设$\{\omega_n^{(t)}\}$是方程(2.6.1)的伴随序列.由定理2.6.2可知$\{\omega_n^{(t)}\}$是单调的.不失一般性,我们说对每个$\{\omega_n^{(t)}\}$它是不小于$a(n)$的严格 Subnormal,注意到如果 $a_*\geqslant 1$,那么 $\omega_n^{(0)}\geqslant a(n)\geqslant a_*\geqslant 1$.由推论2.6.2的结果可知结论成立.如果 $\omega_n^{(0)}=a(n)\geqslant a_*$, $n\geqslant N-\tau^*$,那么

$$\omega_n^{(1)} = a(n) + \sum_{i=1}^{k} p_i(n) \prod_{j=1}^{m_i} \prod_{s=n-\tau_{ij}(n)}^{n-1} \frac{1}{(1-\omega_s^{(0)})^{\alpha_{ij}}}$$

$$\geqslant a(n)+\sum_{i=1}^{k}p_i(n)\prod_{j=1}^{m_i}\prod_{s=n-\tau_{ij}(n)}^{n-1}\frac{1}{(1-a_*)^{\alpha_{ij}}}$$

$$=a(n)+\sum_{i=1}^{k}p_i(n)(1-a_*)^{-\sum\limits_{j=1}^{m_i}\alpha_{ij}\tau_{ij}(n)}$$

$$\geqslant a(n)+\mu_1,\quad n\geqslant N,$$

$$\mu_1=\inf_{n\geqslant N-\tau^*}\sum_{i=1}^{k}p_i(n)(1-a_*)^{-\sum\limits_{j=1}^{m_i}\alpha_{ij}\tau_{ij}(n)}.$$

因此有 $\omega_n^{(1)}\geqslant a_*+\mu_1$. 如果 $a_*+\mu_1\geqslant 1$,结论仍然成立. 归纳定义

$$\mu_{t+1}=\inf_{n\geqslant N-\tau^*}\sum_{i=1}^{k}p_i(n)(1-a_*-\mu_t)^{-\sum\limits_{j=1}^{m_i}\alpha_{ij}\tau_{ij}(n)},t=1,2,\cdots,\tag{2.6.11}$$

那么有

$$\omega_n^{(t)}\geqslant a(n)+\mu_t,\quad n\geqslant N,\quad t\geqslant 1.\tag{2.6.12}$$

且

$$\omega_n^{(t)}\geqslant a_*+\mu_t,\quad n\geqslant N-\tau^*,\quad t\geqslant 1.$$

类似地,如果对某一 $t\geqslant 1$ 有 $a_*+\mu_t\geqslant 1$,结论成立.

设 $a_*<1$ 且 $a_*+\mu_t<1$, $t\geqslant 1$ 我们能证明 $0<\mu_1\leqslant\mu_2\leqslant\cdots\leqslant 1-a_*$. 确实, $\mu_1\geqslant 0$. 如果 $\mu_1=0$,则有 $\{n_s\}$ 存在使得

$$\lim_{s\to\infty}\sum_{i=1}^{k}p_i(n_s)(1-a_*)^{-\sum\limits_{j=1}^{m_i}\alpha_{ij}\tau_{ij}(n)}=0.$$

取 $\mu'=(1-a_*)/2$,那么 $0<\mu'<1-a_*$,且

$$\lim_{s\to\infty}\frac{1}{\mu'}\sum_{i=1}^{k}p_i(n_s)(1-a_*-\mu')^{\sum\limits_{j=1}^{m_i}\alpha_{ij}\tau_{ij}(n_s)}$$

$$\leqslant\lim_{s\to\infty}\frac{2^{\tau}}{\mu'}\sum_{i=1}^{k}p_i(n_s)(1-a_*)^{-\sum\limits_{j=1}^{m_i}\alpha_{ij}\tau_{ij}(n_s)}=0.$$

这与(2.6.10)式相矛盾.因为 $\mu_1>0$,因此

$$\mu_2=\inf_{n\geqslant N-\tau^*}\sum_{i=1}^{k}p_i(n)(1-a_*-\mu_1)^{-\sum_{j=1}^{m_i}\alpha_{ij}\tau_{ij}(n)}$$

$$\geqslant\inf_{n\geqslant N-\tau^*}\sum_{i=1}^{k}p_i(n)(1-a_*)^{-\sum_{j=1}^{m_i}\alpha_{ij}\tau_{ij}(n)}=\mu_1.$$

归纳可知 $0<\mu_1\leqslant\mu_2\leqslant\cdots\leqslant 1-a_*$.令 $\mu^*=\lim\limits_{l\to\infty}\mu_l$,如果 $\mu^*<1-a_*$,由(2.6.11)式必有

$$\mu^*=\inf_{n\geqslant N-\tau^*}\sum_{i=1}^{k}p_i(n)(1-a_*-\mu^*)^{-\sum_{j=1}^{m_i}\alpha_{ij}\tau_{ij}(n)}.$$

这又与(2.6.10)式相矛盾,因此 $\mu^*=1-a_*$.但这时由(2.6.12)式可知 $\omega_n^{(\infty)}\geqslant a(n)+1-a_*\geqslant 1$.由定理 2.6.2 知方程(2.6.1)无最终正解.证毕.

对于固定的 $n\geqslant N-\tau^*$,

$$\inf_{0<\mu<1-a_*}\left\{\frac{1}{\mu}p_i(n)(1-a_*-\mu)^{-\sum_{j=1}^{m_i}\alpha_{ij}\tau_{ij}(n)}\right\}$$

在点 $\mu_i=(1-a_*)(1+\sum\limits_{j=1}^{m_i}\alpha_{ij}\tau_{ij}(n))^{-1}$达到且等于

$$\frac{p_i(n)(1+\tau_i(n))^{1+\tau_i(n)}}{(1-a_*)^{1+\tau_i(n)}(\tau_i(n))^{\tau_i(n)}},$$

其中,$\tau_i(n)=\sum\limits_{j=1}^{m_i}\alpha_{ij}\tau_{ij}(n)<\infty,1\leqslant i\leqslant k,n\geqslant 0$.

因此,如果

$$\liminf_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\frac{p_i(n)(1+\tau_i(n))^{1+\tau_i(n)}}{(1-a_*)^{1+\tau_i(n)}(\tau_i(n))^{\tau_i(n)}}>1, \qquad (2.6.13)$$

则(2.6.1)无最终正解.特别当 $a(n)\equiv 0,\tau_i(n)\equiv\tau$ 时(2.6.13)变为

$$\liminf_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k}p_i(n)>\frac{\tau^\tau}{(1+\tau)^{\tau+1}}.$$

另外,我们采用几何平均值和算术平均值的关系有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{k}p_i(n)(1-a_*-\mu)^{-\tau_i(n)}\\
&\geqslant\frac{k}{\mu}\left\{\sum_{i=1}^{k}p_i(n)\right\}^{\frac{1}{k}}\left\{\sum_{i=1}^{k}(1-a_*-\mu)^{-\tau_i(n)}\right\}^{\frac{1}{k}}\\
&=k\left\{\sum_{i=1}^{k}p_i(n)\right\}^{\frac{1}{k}}\left\{\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\mu(1-a_*-\mu)^{-\tau_i(n)}}\right\}^{\frac{1}{k}}
\end{aligned}$$

$$\inf_{0<\mu<1-a^*}\frac{1}{\mu(1-a_*-\mu)^{\tau_i(n)}}=\frac{1}{(1-a_*)^2}\cdot\frac{(\tau_i(n)+1)^{\tau_i(n)+1}}{\tau_i(n)^{\tau_i(n)}}.$$

因此

$$\liminf_{n\to\infty}k\left\{\sum_{i=1}^{k}p_i(n)\right\}^{\frac{1}{k}}\left\{\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{(1-a_*)^2}\cdot\frac{(\tau_i(n)+1)^{\tau_i(n)+1}}{\tau_i(n)^{\tau_i(n)}}\right\}^{\frac{1}{k}}>1.$$

(2.6.1)无最终正解.

定理 2.6.6 $\sup\limits_{n\geqslant N-\tau^*}a(n)=a^*<1$.

$$\sup_{n\geqslant N-\tau^*}\sum_{i=1}^{k}p_i(n)(1-a^*)^{-\sum_{j=1}^{m_i}\alpha_{ij}\tau_{ij}(n)}>0,$$

且有常数 $\varphi\in(0,1-a^*)$使得

$$\sup_{n\geqslant N-\tau^*}\left\{\frac{1}{\varphi}\sum_{i=1}^{k}p_i(n)(1-a^*-\varphi)^{-\sum_{j=1}^{m_i}\alpha_{ij}\tau_{ij}(n)}\right\}\leqslant 1.\quad(2.6.14)$$

则(2.6.1)有一最终正解.

证明 设$\{w_n^{(t)}\}$是(2.6.1)的伴随序列,注意到

$$\begin{aligned}
w_n^{(1)}&=a(n)+\sum_{i=1}^{k}p_i(n)\prod_{j=1}^{m_i}\prod_{s=n-\tau_{ij}(n)}^{n-1}\frac{1}{(1-w_s^{(0)})^{\alpha_{ij}}}\\
&\leqslant a(n)+\varphi_1,\quad n\geqslant N,
\end{aligned}$$

且

$$w_n^{(1)} \leqslant a^* + \varphi_1 \qquad n \geqslant N - \tau^*,$$

其中

$$\varphi_1 = \sup_{n \geqslant N-\tau^*} \sum_{i=1}^{k} p_i(n)(1 - a^*)^{-\sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij}\tau_{ij}(n)}.$$

由假设知

$$0 < \varphi_1 \leqslant \sup_{n \geqslant N-\tau^*} \sum_{i=1}^{k} p_i(n)(1 - a^* - \varphi)^{-\sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij}\tau_{ij}(n)} \leqslant \varphi.$$

归纳可知,定义

$$\varphi_{t+1} = \sup_{n \geqslant N-\tau^*} \sum_{i=1}^{k} p_i(n)(1 - a^* - \varphi_t)^{-\sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij}\tau_{ij}(n)}, t = 1,2,\cdots. \tag{2.6.15}$$

有

$$w_n^{(t)} \leqslant a(n) + \varphi_t \qquad n \geqslant N, t \geqslant 1. \tag{2.6.16}$$

$$w_n^{(t)} \leqslant a^* + \varphi_t \qquad n \geqslant N - \tau^*, t \geqslant 1.$$

由(2.6.14)知 $0 < \varphi_1 \leqslant \varphi_2 \leqslant \cdots \leqslant \varphi$. 这样,由(2.6.16)知 $w_n^{(t)} \leqslant a^* + \varphi_t \leqslant a^* + \varphi$. 由定理 2.6.2 知命题成立,证毕.

作为这节的最后,我们建立一个比较定理,为此考虑比较不等式

$$\Delta y_n + A(n)y_n + \sum_{i=1}^{k} P_i(n) \prod_{j=1}^{m_i} | y_n - \sigma_{ij}(n) |^{\alpha_{ij}} \operatorname{sgn} y_{n-\sigma_{ij}} \leqslant 0, n \geqslant 0, \tag{2.6.17}$$

其中$\{A(n)\}$是实数列,$\{P_1(n)\}, \cdots, \{P_k(n)\}$是非负数列,$\sigma_{11}(n), \cdots, \sigma_{km_k}(n)$与 $\tau_{ij}(n)$满足类似条件. 类似(2.6.1),我们也可建立(2.6.17)的伴随序列$\{W^{(t)}\}$:

$$W_n^{(0)} = A(n), n \geqslant 0, t = 0,1,2,\cdots,$$

$$W_n^{(t+1)} = A(n) + \sum_{i=1}^{k} P_i(n) \prod_{j=1}^{m_i} \prod_{s=n-\sigma_{ij}(n)}^{n-1} \frac{1}{(1 - W_s^{(t)})^{\alpha_{ij}}}, n \geqslant N.$$

且 $W_n^{(t+1)}=W_n^{(t)}, n<N$.

定理 2.6.7 如果

$$a(n)\leqslant A(n),\ \tau_{ij}(n)=\sigma_{ij}(n),\ p_i(n)\leqslant P_i(n),$$

这里 $1\leqslant i\leqslant k$. $1\leqslant j\leqslant m_k, n\geqslant 0$. 如果(2.6.17)有一个最终正解,则(2.6.1)也有一个最终正解.

确实,如果(2.6.17)有一个最终正解,则有

$$W_n\geqslant A(n)+\sum_{i=1}^{k}P_i(n)\prod_{j=1}^{m_i}\prod_{s=n-\sigma_{ij}(n)}^{n-1}\frac{1}{(1-W_s)^{\alpha_{ij}}}.$$

有一个严格 Subnormal 解 $\{W_n\}$. 而

$$W_n\geqslant A(n)+\sum_{i=1}^{k}P_i(n)\prod_{j=1}^{m_i}\prod_{s=n-\sigma_{ij}(n)}^{n-1}\frac{1}{(1-W_s)^{\alpha_{ij}}}$$

$$\geqslant a(n)+\sum_{i=1}^{k}p_i(n)\prod_{j=1}^{m_i}\prod_{s=n-\sigma_{ij}(n)}^{n-1}\frac{1}{(1-w_s)^{\alpha_{ij}}}.$$

由定理 2.6.2 知结论成立,证毕.

如果将定理 2.6.7 中的条件 $\tau_{ij}(n)=\sigma_{ij}(n)$改为 $\tau_{ij}(n)\leqslant\sigma_{ij}(n)$. 那么(2.6.17)有一个非增最终正解,则(2.6.1)有一最终正解. 显然当 $A(n)=a(n)\equiv 0$ 时不受任何限制.

§2.7 振动解的渐近性

考虑带有强迫项的差分方程

$$x_{n+1}-x_n+p(n)f(x_{\sigma(n)})=g(n), n=0,1,2,\cdots, \quad (2.7.1)$$

其中 $\{p(n)\}_{n=0}^{\infty}$和$\{g(n)\}_{n=0}^{\infty}$是实数列, $\{\sigma(n)\}$是 $n\geqslant 0$ 的整数值函数且满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma(n)=\infty$, f 是一实值非减函数当$x\neq 0$ 时有 $xf(x)>0$.

本节中将考察方程(2.7.1)所有振动解的有界性和趋零性. 这方而的工作是有价值的. 因为如果再加(2.7.1)非振动解类似性质,我们可以得其所有解的有界性或趋零性.

(2.7.1)当 $n\geqslant 0$ 时 $\sigma(n)\leqslant n$，是一递推关系，因此其解的存在性和唯一性是显然的. 当 $\sigma_*=\inf\limits_{n\geqslant 0}\sigma(n)>-\infty$ 而 $n\geqslant\sigma_*$ 时，我们假设(2.7.1)满足唯一存在定理的条件.

为方便起见，我们记 $a^+=\max\{a,0\}$，$a^-=-\max\{a,0\}$. 数列 $\{x_n\}_{n=a}^{b}$ 的一个正弧是指有 α,β 使得 $\alpha\leqslant i\leqslant\beta$ 时，$x_i>0$ 而 $x_{\alpha-1}\leqslant 0$，$x_{\beta-1}\leqslant 0$，记为 $x(\alpha,\beta)=\{x_\alpha,x_{\alpha+1},\cdots,x_\beta\}$；负弧可类似定义. 给定两个正弧 $x(\alpha,\beta)$ 和 $x(s,t)$，如果 $\{x_\beta,x_{\beta+1},\cdots,x_s\}$ 中无任何正弧，称 $x(\alpha,\beta)$ 是 $x(s,t)$ 的正前趋. 不难看出，如果 $\{x_n\}_{n=a}^{\infty}$ 是振动的且有正的子列，则 x 有正弧列. 确实，令 $\Omega=\{n\mid x_n>0,n\geqslant a\}$，显然可知 $\Omega\neq\{a,a+1,\cdots\}$，于是有 α 使得 $x_{\alpha-1}\leqslant 0$，而 $x_\alpha>0$. 如果 $x_{\alpha+1}\leqslant 0$，则有 $\beta=\alpha+1$. 否则，有 m 使得 $x_{\alpha+1}>0,\cdots,x_m>0,x_{m+1}\leqslant 0$. 这时有 $\beta=m$. 归纳可知，有 x 的唯一正弧列 $\{x(\alpha_i,\beta_i)\}_{i=1}^{\infty}$，使得每一个正弧 $x(\alpha_i,\beta_i)$ 是 $x(\alpha_{i+1},\beta_{i+1})$ 的正前趋. 如果假设

$$\limsup_{n\to\infty}x_n=\sigma>0,$$

则有正弧子列 $\{x(s_i,t_i)\}_{i=1}^{\infty}$，使得 $\max\limits_{s_i\leqslant j\leqslant t_i}x_j>\frac{\sigma}{2}$；如果 $\limsup\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$，类似地有正弧子列 $\{x(u_i,v_i)\}_{i=1}^{\infty}$，使得 $\max\limits_{u_i\leqslant j\leqslant v_i}x_j=\max\limits_{u_i\leqslant j\leqslant t_i}x_j$ 且单调发散到 ∞. 如果 x 振动且有负的子列，我们会得到类似的结果. 于是当 $\{x_n\}_{n=a}^{\infty}$ 振动且 $\limsup\limits_{n\to\infty}|x_n|=\sigma>0$. 则有正弧列 $\{x(s_i,t_i)\}_{n=1}^{\infty}$，使得 $\max\limits_{s_i\leqslant j\leqslant t_i}|x_j|>\frac{\sigma}{2}$.（或有负弧列 $\{x(u_i,v_i)\}_{n=1}^{\infty}$ 使得 $\max\limits_{u_i\leqslant j\leqslant v_i}|x_j|>\frac{\sigma}{2}$）；如果 $\{x_n\}_{n=a}^{\infty}$ 振动且 $\limsup\limits_{n\to\infty}|x_n|=\infty$. 则有正弧列 $\{x(s_i,t_i)\}_{n=1}^{\infty}$ 使得 $\max\limits_{a_i\leqslant j\leqslant t_i}|x_j|=\max\limits_{s_i\leqslant j\leqslant t_i}|x_j|$ 且单调发散到 ∞（或有负弧列 $\{x(u_i,v_i)\}_{n=1}^{\infty}$ 使得 $\max\limits_{a_i\leqslant j\leqslant t_i}|x_j|=\max\limits_{s_i\leqslant j\leqslant t_i}|x_j|$ 且单调发散到 ∞）. 当一个振动数列的相邻弧列转行 $\{x(\alpha_i,\beta_i)\}_{n=1}^{\infty}$ 对所有的 i 有正常数 c 使得 $\beta_i-\alpha_i\leqslant c$，这时称 x 振动距离有界 c. 周期振动数列就是一个振动有界数列.

设$\{x_n\}$是(2.7.1)的有界振动解,且设$\sup\limits_{n\leqslant\sigma_*}|x_n|=M$,

$$\limsup_{n\to\infty}|x_n|>2\sigma>0, \tag{2.7.2}$$

由前面的讨论可知,有 x 的相邻弧列$\{x(\alpha_i,\beta_i)\}_{n=1}^{\infty}$使得

$$M_i=\max_{\alpha_i\leqslant j\leqslant\beta_i}|x_j|=|x_{\gamma_i}|>\sigma,\quad i=1,2,\cdots.$$

对(2.7.1)从 α_i-1 到 γ_i-1 求和,则有

$$x_{\gamma_i}-x_{\alpha_i-1}=-\sum_{j=\alpha_i-1}^{\gamma_i-1}p(j)f(x_{\sigma(j)})+\sum_{j=\alpha_i-1}^{\gamma_i-1}g(j).$$

因此$|x_{\gamma_i}|\leqslant|x_{\gamma_i}-x_{\alpha_i-1}|$,于是有

$$M_i=|x_{\gamma_i}|\leqslant\sum_{j=\alpha_i-1}^{\gamma_i-1}|p(j)f(x_{\sigma(j)})|+\sum_{j=\alpha_i-1}^{\gamma_i-1}|g(j)|. \tag{2.7.3}$$

如果设 f 满足$|f(x)|\leqslant f(|x|)$,则有

$$|f(x_{\sigma(j)})|\leqslant f(|x_{\sigma(j)}|)\leqslant f(M).$$

于是

$$\sigma<M_i\leqslant f(M)\sum_{j=\alpha_i-1}^{\infty}|p(j)|+\sum_{j=\alpha_i-1}^{\infty}|g(j)|.$$

于是有如下结果

定理 2.7.1 假设$|f(x)|\leqslant f(|x|)$,

$$\sum_{j=0}^{\infty}|p(j)|<\infty,\ \sum_{j=0}^{\infty}|g(j)|<\infty. \tag{2.7.4}$$

则(2.7.1)任一有界振动解$\{x_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

定理 2.7.2 定理 2.7.1 的条件成立,$\sigma(n)\leqslant n+1$ 且

$$\lim_{|x|\to\infty}\sup\frac{f(x)}{x}=\Gamma<\infty, \tag{2.7.5}$$

则(2.7.1)振动解是有界的,因此定理 2.7.1 的结论成立.

证明 设$\{x_n\}$是(2.7.1)的无界振动解,$\{x(\alpha_i,\beta_i)\}_{i=1}^{\infty}$是其相邻弧列,令

$$M_i = \max_{\alpha_i \leqslant j \leqslant \beta_i} |x_j|, \quad i \geqslant 1.$$

由$\{x_n\}$的无界性，如果必要我们可选择一个子列使得$\{M_i\}$非减并发散列∞. 因此

$$M_i = \max_{\alpha_i \leqslant j \leqslant \beta_i} |x_j| = \max_{\sigma_* \leqslant j \leqslant \beta_i} |x_j|,$$

其中$M_i = |x_{\gamma_i}|$. 这时，显然也有(2.7.3)成立. 而$\sigma(n) \leqslant n+1$，于是，

$$\max_{\alpha_i \leqslant j \leqslant \gamma_i - 1} |f(x_{\sigma(j)})| \leqslant \max_{\alpha_i \leqslant j \leqslant \gamma_i - 1} f(|x_{\sigma(j)}|) \leqslant f(M_i).$$

从而有

$$1 \leqslant \frac{f(M_i)}{M_i} \sum_{j=\alpha_i-1}^{\infty} |p(j)| + \frac{1}{M_i} \sum_{j=\alpha_i-1}^{\infty} |g(j)|. \qquad (2.7.6)$$

当$i \to \infty$，则有

$$1 \leqslant \Gamma \lim_{i \to \infty} \sum_{j=\alpha_i-1}^{\infty} |p(j)| + \frac{1}{M_1} \lim_{i \to \infty} \sum_{j=\alpha_i-1}^{\infty} |g(j)| = 0.$$

这是一个矛盾. 证毕.

例 2.7.1 考虑差分方程

$$x_{n+1} - x_n + \frac{1}{n!} x_{n+1} = (-1)^{n+1} \frac{n!(n+2)+1}{n!(n+1)!},$$

它显然满足定理 2.7.2 的条件. 因此它的每一振动解趋于零. 事实上，$\left\{(-1)^n \frac{1}{n!}\right\}$就是它的解.

我们注意到，当$\sigma(n) = n+1$时，对f用不着任何多余的限制，(2.7.3)可被下式代替

$$\begin{aligned} M_i &\leqslant f(M) \sum_{j=\alpha_i-1}^{\gamma_i-1} p^-(j) + \sum_{j=\alpha_i-1}^{\gamma_i-1} |g(j)| \\ &\leqslant f(M) \sum_{j=\alpha_i-1}^{\infty} p^-(j) + \sum_{j=\alpha_i-1}^{\infty} |g(j)|. \end{aligned}$$

而(2.7.6)变为

$$1 \leqslant \frac{f(M_i)}{M_i} \sum_{j=\alpha_i-1}^{\infty} p^-(j) + \frac{1}{M_i} \sum_{j=\alpha_i-1}^{\infty} |g(j)|.$$

定理 2.7.3 假设 $\sigma(n) = n+1$ 且

$$\sum_{j=0}^{\infty} p^-(j) < \infty, \quad \sum_{j=0}^{\infty} |g(j)| < \infty, \tag{2.7.7}$$

则(2.7.1)的有界振动解 $\{x_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

定理 2.7.4 定理 2.7.3 的条件及(2.7.5)成立,则定理 2.7.2 的结论成立.

如果 $\{x_n\}$ 是(2.7.1)振动距离有界 c 解,则(2.7.3)变为

$$\sigma < M_i \leqslant f(M) \sum_{j=\alpha_i-1}^{\alpha_i+c} p(j) + \sum_{j=\alpha_i-1}^{\alpha_i+c} p(j),$$

(2.7.6)变为

$$1 \leqslant \frac{f(M_i)}{M_i} \sum_{j=\alpha_i-1}^{\alpha_i+c} |p(j)| + \frac{1}{M_i} \sum_{\alpha_i-1}^{\alpha_i+c} |p(j)|.$$

定理 2.7.5 假设 $|f(x)| \leqslant f(|x|)$,且

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=n}^{n+c+1} |p(j)| = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=n}^{n+c+1} |p(j)| = 0, \tag{2.7.8}$$

则(2.7.1)有界的振动距离界 c 的解 $\{x_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. 如果另加条件 $\sigma(n) \leqslant n+1$ 且(2.7.5)成立,则(2.7.1)有振动距离界 c 的解 $\{x_n\}$ 是有界的.

类似的,我们也会有定理 2.7.3 和 2.7.4 的类似结果.

在(2.7.1)中,如果强迫项恒为零,这时(2.7.6)变为

$$1 \leqslant \frac{f(M_i)}{M_i} \sum_{j=\alpha_i-1}^{\alpha_i+1} |p(j)|.$$

于是,当

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{j=n}^{n+c+1} |p(j)| < \frac{1}{\Gamma} \tag{2.7.9}$$

时,我们得出矛盾.

定理 2.7.6 设(2.7.5)和(2.7.9)成立,$f(|x|)\geqslant|f(x)|$,$\sigma(n)\leqslant n+1$.则(2.7.1)有振动距离界的解是有界的.

$n\geqslant 0, p(n)\geqslant 0$ 时,有 $G(n)$ 使得 $\Delta G(n)=g(n)$,设 $\{x_n\}$ 是(2.7.1)的最终正解,这时有

$$\Delta(x_n-G(n))=-p(n)f(x_{\sigma(n)})\leqslant 0$$

最终成立.如果 $\{G(n)\}$ 有一个非正子列 $\{G(n_k)\}$,则 $\{x_n-G(n)\}$ 最终不是非正的.否则,

$$0<x_{n_k}\leqslant G(n_k)\leqslant 0.$$

得出矛盾,于是 $x_n-G(n)>0$ 最终成立.从而有

$$x_n>G^+(n).$$

所以,

$$\Delta(x_n-G(n))=-p(n)f(x_{\sigma(n)})\leqslant -p(n)f(G^+(\sigma(n))).$$

从充分大的 N 到 k 对上式求和,则有

$$0>-(x_{k+1}-G(k+1))\geqslant -x_N+G(N)+\sum_{n=N}^{k}p(n)f(G^+(\sigma(n))).$$

于是可知,当

$$\sum_{n=0}^{\infty}p(n)f(G^+(\sigma(n)))=\sum_{n=0}^{\infty}p(n)f(G^-(\sigma(n)))=\infty,\quad(2.7.10)$$

则(2.7.1)的所有解振动.

特别地,当 $p(n)\geqslant n$,方程

$$\Delta x_n+p(n)x_{n+1}=(-1)^{n+1}\left[\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n^2}\right]\quad(2.7.11)$$

中 $G(n)=(-1)^n/n^2$,满足条件(2.7.5),(2.7.7)和(2.7.10).因此,(2.7.11)的所有解振动且趋于零.

§2.8 注 记

定理 2.1.1 由 Ladas 在[15]中获得,有关这方面的工作可参看

[16－19]. 定理 2.1.2 和 2.1.3 由 Jaros 和 Stavroulakis 在[20]中求得，推论 2.1.1 则首先由 Ladas 在[15]中建立. 定理 2.1.4 和 2.1.5 取材于 Lin 和 Cheng[22]，方程(2.2.1)首先由 Erbe 和 Zhang 在[14]中考虑，参看[24－32]. 定理 2.2.1 和 2.2.2 由 Zhang 和 Cheng 在[24]中建立，定理 2.2.3 则是新的. 推论 2.2.1 首先被 Yu，Zhang 和 Qian 在[26]中给出，推论 2.2.2 是新的，定理 2.2.4 可在 Chuanxi，Ladas 和 Yan 的[25]中发现. 定理 2.3.1 首先由 Ladas 等在[30]给出. 引理 2.3.1 先见于[26]和[27]，但他们的证明过程有错误，反例见 Cheng 和 Zhang 的[29]，本书的证明采用了 Domshlak[28]的方法. 定理 2.3.2 则来源于 Stavroulak 的[31]. §2.4 取自 Tian，Xie 和 Cheng[32]. 定理 2.5.1 以及引理 2.5.1 至 2.5.3 请看文献[33]，定理 2.5.2 和 2.5.4，2.5.5，2.5.6 及推论 2.5.1 见[35]. 定理 2.5.3 则是新的. §2.6 取材于 Cheng 和 Zhang 的[38]. §2.7 是由 Cheng，Zhang 和 Liu 在[39]中得到的，有关这方面的结果也可看[40].

关于方程

$$\Delta x_n + p_n x_{n-\tau} = 0, \quad n = 0,1,\cdots, \tag{2.8.1}$$

本章并没有讨论其非振动性，是不是在任何情况下(2.8.1)都存在振动解？到目前为止，并未见到如此结果. 因此，获得方程(2.8.1)振动解的存在性定理和非振动性是有价值的.

第三章　一阶中立型差分方程的振动性

§3.1　常系数差分方程

本节将考虑常系数方程

$$\Delta(x_n + px_{n-\tau}) + qx_{n-\sigma} = 0, \quad n = 0,1,2,\cdots \tag{3.1.1}$$

其中 p 和 q 是实数，τ 是正整数，σ 是非负整数. 方程(3.1.1)还可以写成

$$x_{n+1} - x_n + px_{n+1-\tau} - px_{n-\tau} + qx_{n-\sigma} = 0.$$

因此，由定理 2.1.1 可以得到如下结果

引理 3.1.1　方程(3.1.1)振动的充要条件是其特征方程

$$\lambda - 1 + \lambda^{-\tau}(\lambda - 1)p + q\lambda^{-\sigma} = 0 \tag{3.1.2}$$

无正根.

接下来，我们分五种情况讨论方程(3.1.2)无正根的条件. 这五种情况是：(i) $\tau=\sigma=1$；(ii) $\tau=\sigma>1$；(iii) $\tau>\sigma$；(iv) $8\leqslant\tau<\sigma<\rho(\tau)$ 和(v) $\sigma\geqslant\rho(\tau)$ 且 $\sigma>1$，其中

$$\rho(\tau) = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\tau^2+1}+\tau-1}{2}, \ \tau = 1,2\cdots. \tag{3.1.3}$$

这里应注意到

$\rho(1) = 1$, $\rho(2) = 2.081\cdots$, $\rho(6) = 6.801\cdots$, $\rho(7) = 8,\cdots$, $x>1$ 时 $\rho'(x)>1$，因此 $\tau=1$ 时，$\rho(\tau)=\tau$；$2\leqslant\tau\leqslant6$ 时，$\rho(\tau)>\tau$；$\tau=7$ 时，$\rho(\tau)=\tau+1$；$\tau\geqslant8$ 时 $\rho(\tau)>\tau+1$. 这说明如上的分法是可行的.

定理 3.1.1　如果 $\tau=\sigma=1$，那么方程(3.1.1)振动的充要条件

为或者 $q>(1+p)^2/4$;或者 $q\geqslant p\geqslant 1$.

证明 这时,方程(3.1.1)的特征方程变为二次方程

$$f(\lambda)=\lambda^2+(p-1)\lambda+q-p=0. \tag{3.1.4}$$

直接计算可知结论成立.

定理 3.1.2 设 $\tau=\sigma>1$,那么方程(3.1.1)振动的充要条件为或者 $p>\frac{(\tau-)^{\tau-1}}{\tau^\tau}$ 且 $q\geqslant p$;或者 $p\leqslant\frac{(\tau-)^{\tau-1}}{\tau^\tau}$ 且 $q>\tau(\eta-1)^2\eta^{\tau-1}$,其中 η 是方程

$$p=(\tau+1)\eta^{\tau-1}(\frac{\tau}{\tau-1}-\eta) \tag{3.1.5}$$

在 $(\frac{\tau-1}{\tau},\infty)$ 上的唯一正根.

证明 $\tau=\sigma>1$ 时特征方程变为

$$f(p,q,\lambda)\equiv\lambda^{\tau+1}-\lambda^\tau+(\lambda-1)p+q=0. \tag{3.1.6}$$

由于我们只关心(3.1.6)的正根,因此限制 $\lambda>0$. 注意到 $\lim\limits_{\lambda\to\infty}f(p,q,\lambda)=+\infty$, $\lim\limits_{\lambda\to 0^+}f(p,q,\lambda)=q-p$, $f(p,q,1)=q$. 因此当 $q\leqslant 0$ 或者 $q<p$ 时,特征方程(3.1.6)显然有正根. 于是只需考虑 $q>0$, $q\geqslant p$ 的情形.

将 λ 视为参数,方程(3.1.6)是以 p 和 q 为坐标的直线族 V. 给定特殊的 λ 可确定一条直线,由包络理论[23]可知,V 的包络由如下方程对给出:

$$f(x,y,\lambda)=0,$$
$$f_\lambda(x,y,\lambda)=(\tau+1)\lambda^\tau-\tau\lambda^{\tau-1}+x=0.$$

对应的参数方程式是

$$x(\lambda)=(\tau+1)\lambda^{\tau-1}(\frac{\tau}{\tau+1}-\lambda), \tag{3.1.7}$$

$$y(\lambda)=\tau(\lambda-1)^2\lambda^{\tau-1}, \tag{3.1.8}$$

$$\frac{\mathrm{d}x(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}=\tau(\tau+1)\lambda^{\tau-2}\left(\frac{\tau-1}{\tau+1}-\lambda\right),$$

$$\frac{\mathrm{d}y(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = \tau(\tau+1)\lambda^{\tau-2}(\lambda-1)\left(\lambda-\frac{\tau-1}{\tau+1}\right),$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1-\lambda,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{1}{\tau(\tau+t)}\lambda^{\tau-2}\left(\frac{\tau-1}{\tau+1}-\lambda\right),$$

$x(\lambda)$在$(0,\infty)$有唯一极大值点$\lambda_*=\frac{\tau-1}{\tau+1}$. 设$C_1$是$\lambda\in(0,\lambda_*)$时的曲线，$C_2$是$\lambda\in[\lambda_*,\infty)$时的曲线，注意到$y$作为$x$的函数在$(0,\lambda_*)$上严格增加上凸且当$\lambda=0$时斜率为1，而在$(\lambda_*,\infty)$上严格增加上凹且与直线$y=x$有交点

$$(x^*(\lambda^*),y^*(\lambda^*)) = \left(\frac{(\tau-1)^{\tau-1}}{\tau^\tau},\frac{(\tau-1)^{\tau-1}}{\tau^\tau}\right),\lambda^* = \frac{\tau-1}{\tau}.$$

而曲线C_2在(x^*,y^*)的左边可以表达成$y=g(x)$，这只要从方程(3.1.5)中解出唯一的λ，然后代入特征方程(3.1.6)即可. 事实上，(3.1.6)的右边在(λ^*,∞)上从$\frac{(\tau-1)^{\tau-1}}{\tau^\tau}$严格单调减少至$-\infty$. 因此对任意的$x\leqslant\frac{(\tau-1)^{\tau-1}}{\tau^\tau}$，(3.1.6)有唯一的根$\eta=\eta(x)\in((\tau-1)/\tau,\infty)$. 设$\Omega_1$是$x>\frac{(\tau-1)^{\tau-1}}{\tau^\tau}$与$y\geqslant x$围成的区域，$\Omega_2$是$x\leqslant\frac{(\tau-1)^{\tau-1}}{\tau^\tau}$与曲线$C_2$围成的区域，那么$q\geqslant p$时过点$(p,q)$的直线存在与包络线$C_1\cup C_2$某点切线的斜率相同的充要条件是$(p,q)\notin\Omega_1\cup\Omega_2$. 这就说明当$p>\frac{(\tau-1)^{\tau-1}}{\tau^\tau}$时，$f(x,y,\lambda)$无任何正根的充要条件是$q\geqslant p$；而当$p\leqslant\frac{(\tau-1)^{\tau-1}}{\tau^\tau}$时$f(p,q,\lambda)$无任何正根的充要条件是

$$q > y(\eta(p)) = \tau(\eta(p)-1)^2\eta^{\tau-1}(p),$$

其中$\eta(p)$是方程(3.1.5)在$(\tau(-1)/\tau,\infty)$上的唯一正根. 证毕.

定理 3.1.3 设 $\sigma \geqslant \rho(\tau), \sigma > 1$ 其中 $\rho(\tau)$ 由(3.1.3)式定义. 那么方程(3.1.1)振动的充要条件是

$$q > \frac{\tau}{\sigma - \tau + 1}\left[\frac{\eta^\sigma(\eta - 1)^2}{\left(\eta - \dfrac{\sigma - \tau}{\sigma - \tau + 1}\right)}\right],$$

其中 η 是方程

$$p = \frac{\sigma + 1}{\sigma - \tau + 1}\eta^\tau \frac{\left(\dfrac{\sigma}{\sigma + 1} - \eta\right)}{\left(\eta - \dfrac{\sigma - \tau}{\sigma - \tau + 1}\right)}$$

在 $((\sigma - \tau)/(\sigma - \tau + 1), \infty)$ 上的唯一根.

证明 $\sigma \geqslant \rho(\tau), \sigma > 1$ 时有 $\sigma > \tau$ 且方程(3.1.1)的特征方程变为

$$f(p, q, \lambda) \equiv \lambda^{\sigma+1} - \lambda^\sigma + \lambda^{\sigma-\tau}(\lambda - 1)p + q = 0. \quad (3.1.9)$$

这时 $\lim\limits_{\lambda\to\infty} f(p, q, \lambda) = \infty, f(p, q, 1) = q$, , 因此 $q \leqslant 0$ 时方程(3.1.9)必有正根, 因此限制 $q > 0$. 同定理 3.1.2 的证明一样, 我们记直线族为 V, 则 V 的包络为

$$f(x, y, \lambda) = 0,$$

$$f_\lambda(x, y, \lambda) = (\sigma + 1)\lambda^\sigma - \sigma\lambda^{\sigma-1} + (\sigma - \tau + 1)\lambda^{\sigma-\tau}x,$$

$$-(\sigma - \tau)\lambda^{\sigma-\tau}x = 0.$$

对应的参数方程是

$$x(\lambda) = \frac{\sigma + 1}{\sigma - \tau + 1}\left(\lambda^\tau\left(\frac{\sigma}{\sigma + 1}\lambda\right)\Big/\left(\lambda - \frac{\sigma - \tau}{\sigma - \tau + 1}\lambda\right)\right), \quad (3.1.10)$$

$$y(\lambda) = \frac{\tau}{\sigma - \tau + 1}\left(\lambda^\sigma(\lambda - 1)^2\Big/\left(\lambda - \frac{\sigma - \tau}{\sigma - \tau + 1}\lambda\right)\right), \quad (3.1.11)$$

其中

$$\lambda \in (0, \lambda_*) \cup (\lambda_*, \infty), \ \lambda_* = \frac{\sigma - \tau}{\sigma - \tau + 1}. \quad (3.1.12)$$

$$\frac{\mathrm{d}x(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{-\tau(\sigma+1)}{\sigma-\tau+1}\left(\lambda^{\tau-1}\Big/\left(\lambda-\frac{\sigma-\tau}{\sigma-\tau+1}\lambda\right)^2\right)h(\lambda),$$

$$\frac{\mathrm{d}y(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{\tau(\sigma+1)}{\sigma-\tau+1}\left((\lambda-1)\lambda^{\sigma-1}\Big/\left(\lambda-\frac{\sigma-\tau}{\sigma-\tau+1}\lambda\right)^2\right)h(\lambda),$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\lambda^{\sigma-\tau}(1-\lambda),$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{(\sigma-\tau+1)^2}{\tau(\sigma+1)}\left(\lambda-\frac{\sigma-\tau}{\sigma-\tau+1}\lambda\right)^3\lambda^{\sigma-2\tau}\{h(x)\}^{-1},$$

其中

$$h(\lambda)=\lambda^2-\frac{2\sigma^2-2\sigma\tau+2\sigma-\tau-1}{(\sigma+1)(\sigma-\tau+1)}\lambda+\frac{\sigma(\sigma-\tau)}{(\sigma+1)(\sigma-\tau+1)},\ \lambda\geqslant 0.$$

注意到 $\sigma\geqslant\rho(\tau)$我们有

$$\left\{\frac{2\sigma^2-2\sigma\tau+2\sigma-\tau-1}{(\sigma+1)(\sigma-\tau+1)}\right)^2-\frac{4\sigma(\sigma-\tau)}{(\sigma+1)(\sigma-\tau+1)}$$

$$=\frac{2(\tau^2+1)-(2\sigma-\tau+1)^2}{(\sigma+1)^2(\sigma-\tau+1)^2}\leqslant\frac{2(\tau^2+1)-2(\tau^2+1)^2}{(\sigma+1)^2(\sigma-\tau+1)^2}=0,$$

因此 $h(\lambda)>0$.

设 C_1 表示 $\lambda\in(0,\lambda_*)$时的曲线,C_2 表示 $\lambda\in(\lambda_*,\infty)$时的曲线.当 $\lambda\in(0,\lambda_*)$时,y 作为x 的函数是严格增加上凸的,而当 $\lambda\in(\lambda_*,\infty)$时是严格上凹的.同时,当 $x>\lambda_*$时,我们由(3.1.10)式可解得唯一的 λ.代入(3.1.11)式则得到 $y=g(x)$.即曲线 C.令 Ω 是由曲线 C 的上方围成的区域,那么过上半平面的一点(p,q)的直线有与包络上切线平行的充要条件是$(p,q)\notin\Omega$.这就说明 $f(p,q,\lambda)$无正根的充要条件

$$q>y(\eta(p))=\frac{\tau}{\sigma-\tau+1}\left(\eta^\sigma(\eta-1)^2\Big/\left(\eta-\frac{\sigma-\tau}{\sigma-\tau+1}\right)\right),$$

其中 $\eta(p)$是方程

$$p=\frac{\sigma+1}{\sigma-\tau+1}\eta^\tau\left(\frac{\sigma}{\sigma+1}-\eta\right)\Big/\left(\eta-\frac{\sigma-\tau}{\sigma-\tau+1}\right)$$

在$\left(\frac{\sigma-\tau}{\sigma-\tau+1},\infty\right)$上的唯一正根，证毕.

为了获得$8\leqslant\tau<\sigma<\rho(\tau)$时方程(3.1.1)振动的充要条件，我们先考察函数

$$T(\lambda)=\frac{\sigma+1}{\sigma-\tau+1}\cdot\frac{\lambda^2(\sigma/(\sigma+1)-\lambda)}{\lambda-(\sigma-\tau)/(\sigma-\tau+1)},\quad(3.1.13)$$

其中$\tau<\sigma<\rho$，$(\sigma-\tau)/(\sigma-\tau+1)<\lambda<\infty$. 直接解方程$T'(\lambda)=0$可得两个根

$$\alpha=\frac{\sigma}{\sigma+1}-\frac{\tau+1+\sqrt{(\tau+1)^2-4\sigma(\sigma-\tau+1)}}{2(\sigma+1)(\sigma-\tau+1)},\quad(3.1.14)$$

$$\beta=\frac{\sigma}{\sigma+1}-\frac{\tau+1-\sqrt{(\tau+1)^2-4\sigma(\sigma-\tau+1)}}{2(\sigma+1)(\sigma-\tau+1)},\quad(3.1.15)$$

且满足

$$0<\frac{\sigma-\tau}{\sigma-\tau+1}<\alpha<\beta<\frac{\sigma}{\sigma+1}<1.$$

当$\frac{\sigma-\tau}{\sigma-\tau+1}<\lambda<\alpha$时，函数$T(\lambda)$从$+\infty$严格减少到$T(\alpha)$；当$\alpha<\lambda<\beta$时，函数$T(\lambda)$从$T(\alpha)$严格递增到$T(\beta)$；而当$\lambda>\beta$时，函数$T(\lambda)$从$T(\beta)$严格递减到$-\infty$. 因此，$T(\lambda)=p$，当$p\in(-\infty,T(\alpha))$时有唯一根$T^{-1}(p\in(-\infty,T(\alpha)))$，当$p\in(T(\beta),\infty)$时，有唯一根$T^{-1}(p\in(T(\beta),\infty))$，当$p\in[T(\alpha),T(\beta)]$时有三个根$T_1^{-1}(p\in[T(\alpha),T(\beta)])$，$T_2^{-1}(p\in[T(\alpha),T(\beta)])$和$T_3^{-1}(p\in[T(\alpha),T(\beta)])$满足

$$\begin{aligned}\frac{\sigma-\tau}{\sigma-\tau+1}&<T_1^{-1}(p\in[T(\alpha),T(\beta)])\leqslant\alpha\\&\leqslant T_2^{-1}(p\in[T(\alpha),T(\beta)])\leqslant\beta\\&\leqslant T_3^{-1}(p\in[T(\alpha),T(\beta)])<\infty.\end{aligned}$$

定理 3.1.4　设 $8\leqslant\tau<\sigma<\rho(\tau)$. 那么方程(3.1.1)振动的充要条件是如下条件之一成立.

(i)　$p<T(\alpha)$ 且

$$q>\frac{\tau}{\sigma-\tau+1}\cdot\frac{\eta^{\sigma}(\eta-1)^{2}}{\eta-(\sigma-\tau)/(\sigma-\tau+1)},$$

$$\eta=T^{-1}(p\in(-\infty,T(\alpha)));$$

(ii)　$T(\alpha)\leqslant p\leqslant T(\beta)$ 且

$$q>\max_{i=1,2,3}\left\{\frac{\tau}{\sigma-\tau+1}\cdot\frac{\eta_i^{\sigma}(\eta_i-1)^{2}}{\eta_i-(\sigma-\tau)/(\sigma-\tau+1)}\right\},$$

$$\eta_i=T_i^{-1}(p\in[T(\alpha),T(\beta)]);$$

(iii)　$p>T(\beta)$ 且

$$q>\frac{\tau}{\sigma-\tau+1}\cdot\frac{\eta^{\sigma}(\eta-1)^{2}}{\eta-(\sigma-\tau)/(\sigma-\tau+1)},$$

$$\eta=T^{-1}(p\in(T(\beta),\infty)).$$

证明　类似定理 3.1.3 的证明，仅讨论 $q>0$ 时特征方程(3.1.9)的情况. 同样我们在 $\lambda\in(0,\lambda_*)\cup(\lambda_*,\infty)$ 上讨论 V 的包络线(3.1.10)和(3.1.11)，其中 $\lambda_*=(\sigma-\tau)/(\sigma-\tau+1)$. 这时定理 3.1.3 中的各个导数在这里也有效. 因为 $\sigma<\rho(\tau)$，从而 $h(\lambda)=0$ 有两个根，此二根正是(3.1.14)和(3.1.15)定义的 α 和 β.

设 C_1 表示 $\lambda\in(0,\lambda_*)$ 的包络线，C_2 表示 $\lambda\in(\lambda_*,\alpha)$ 的包络线，C_3 表示 $\lambda\in[\alpha,\beta]$，C_4 表示 $\lambda\in(\beta,\infty)$，在 C_1 上，y 作为 x 的函数是上凹的；C_2 是严格增加上凸的；C_3 是严格增加上凹的；C_4 是上凸的. Ω 是 C_2, C_3 和 C_4 三曲线围成的上侧区域. 类似于对定理 3.1.3 的讨论可知特征方程(3.1.9)无正根的充要条件是 $(p,q)\in\Omega$，证毕.

当 $0\leqslant\sigma<\tau$ 时，为方便起见分三种情况讨论：$\sigma=0,\tau=1$；$\sigma=0,\tau>1$ 和 $\tau\geqslant\sigma+1$.

定理 3.1.5　若 $\sigma=0,\tau=1$，则方程(3.1.1)振动的充要条件是

$p\leqslant 0, q>1-p-2\sqrt{-p}$ 或者 $p\leqslant 0, p+q\geqslant 1$.

证明 此时(3.1.1)的特征方程为

$$f(p,q,\lambda)\equiv\lambda^2+(p+q-1)\lambda-p=0,$$

通过直接计算即可知结论成立.

定理 3.1.6 如果 $\sigma=0, \tau>1$,则方程(3.1.1)振动的充要条件是 $p\leqslant 0$ 且

$$q>\frac{\tau(\eta-1)^2}{\tau-(\tau-1)\eta},$$

其中 η 是方程

$$p=\frac{\eta^{\tau+1}}{(\tau-1)\eta-\tau}$$

在 $(0,\tau/(\tau-1))$ 上的唯一根.

证明 这时,特征方程(3.1.2)变为

$$f(p,q,\lambda)=\lambda^{\tau+1}-\lambda^{\tau}+(\lambda-1)p+q\lambda^{\tau}=0. \quad (3.1.16)$$

由于 $\lim\limits_{\lambda\to\infty}f(p,q,\lambda)=\infty, f(p,q,0)=-p, f(p,q,1)=q$.

因此我们只讨论 $p\leqslant 0, q>0$ 的情况.类似地,可求得包络线

$$x(\lambda)=\frac{\lambda^{\tau+1}}{(\tau-1)\lambda-\tau}, \quad (3.1.17)$$

$$y(\lambda)=\frac{\tau(\lambda-1)^2}{\tau-(\tau-1)\lambda}, \quad (3.1.18)$$

$\lambda\in(0,\tau/(\tau-1))\cup(\tau/(\tau-1),\infty)$ 类似于定理 3.1.3 的讨论可知结论成立,证毕.

定理 3.1.7 设 $\tau>\sigma+1$ 或 $\tau=\sigma+1$ 则方程(3.1.1)振动的充要条件是 $p\leqslant 0$ 且

$$q>\frac{\tau(\eta-1)^2\eta^{\sigma}}{(\tau-\sigma)-(\tau-\sigma-1)\eta},$$

其中 η 是方程

$$p=\frac{(\sigma+1)\eta^{\tau}(\sigma/(\sigma+1)-\eta)}{(\tau-\sigma)-(\tau-\sigma-1)\eta}$$

在$(\sigma/(\sigma+1),(\tau-\sigma)/(\tau-\sigma-1))$或者$(\sigma/(\sigma+1),\infty)$上的唯一根.

证明省略.

§ 3.2　稳定型差分方程

考虑一阶中立型差分方程

$$\Delta(x_n - p_n x_{n-\tau}) + q_n f(x_{n-\sigma}) = 0, n = 0,1,\cdots. \quad (3.2.1)$$

其中 τ 是正整数,σ 是非负整数,$\{p_n\}$是一正数列,$\{q_n\}$是非负实数列且有一正的子列,f 是 $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 的非减实函数且满足当 $x\neq 0$ 时 $xf(x)>0$.差分不等式

$$\Delta(x_n - p_n x_{n-\tau}) + q_n f(x_{n-\sigma}) \leqslant 0,\ n = 0,1,\cdots \quad (3.2.2)$$

是方程(3.2.1)的伴随关系.

引理 3.2.1　设有 N 存在使得

$$p_{N+i\tau} \leqslant 1,\ i = 0,1,\cdots, \quad (3.2.3)$$

$\{x_n\}$是不等式(3.2.2)的一个最终正解,则最终有

$$x_n - p_n x_{n-\tau} > 0. \quad (3.2.4)$$

定理 3.2.1　引理 3.2.1 的条件均成立,则方程(3.2.1)有一个最终正解的充要条件是其伴随关系(3.2.2)有一个最终正解.

定理 3.2.2　递推关系

$$\Delta^2 z_{n-1} + \frac{1}{\tau} q_n f(z_n) \leqslant 0,\ n = 0,1,\cdots \quad (3.2.5)$$

有一个最终正解,当且仅当

$$\Delta(x_n - x_{n-\tau}) + q_n f(x_{n-\sigma}) \leqslant 0,\ n = 0,1,\cdots \quad (3.2.6)$$

有一个最终正解.

由定理 3.2.1 和定理 3.2.2 可知,方程

$$\Delta(x_n - x_{n-\tau}) + q_n f(x_{n-\sigma}) = 0$$

有一个最终正解当且仅当

$$\Delta^2 z_{n-1} + \frac{1}{\tau} q_n f(z_n) = 0$$

有一个最终正解.

特别地,还有如下结论:

差分方程

$$\Delta(x - x_{n-\tau}) + q_n x_{n-\tau}^r = 0 \tag{3.2.7}$$

有一个最终正解当且仅当

$$\Delta^2 z_{n-1} + \frac{1}{\tau} q_n z_n^r = 0 \tag{3.2.8}$$

有一个最终正解,其中 r 是正的奇数之比.

本节中引理和定理的证明可在后边找到.在此省略.

§3.3 不稳定型差分方程

考察不稳定线性中立型差分方程

$$\Delta(x_n - cx_{n-\tau}) = p_n x_{n-\sigma}, \tag{3.3.1}$$

其中 c 是非负实数,τ 是正整数,σ 是非负整数,$\{p_n\}$是非负实数列.方程(3.3.1)可以有振动解,例如方程

$$\Delta(x_n - x_{n-1}) = \frac{4n^2 - 2}{n(n+1)} x_{n-1}$$

有解$\left\{(-1)^n\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$,它是振动的,但方程(3.3.1)也总有非振动解.

定理 3.3.1 方程(3.3.1)存在最终正解.

证明 如果 $p_n \equiv 0$,则任意一个正常数都是(3.3.1)的一个解.如果$\{p_n\}$有正的子列,则有$\{H_n\}$存在使得

$$\sum_{i=n}^{\infty} p_i H_i = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{\sum_{i=n_0}^{n} p_i H_i} = 0. \tag{3.3.2}$$

我们定义

$$z_n = \prod_{l=n_0}^{n} \sum_{k=n_0}^{l} \prod_{j=n_0}^{k} \sum_{i=n_0}^{j} p_i H_i, \tag{3.3.3}$$

那么

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_{n-\tau}}{z_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\prod\limits_{l=n-\tau+1}^{n} \sum\limits_{k=n_0}^{l} \prod\limits_{j=n_0}^{k} \sum\limits_{i=n_0}^{j} p_i H_i} = 0. \tag{3.3.4}$$

由洛比达法则可知

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{z_n} \sum_{i=n_0}^{n} p_i z_{i-\tau} = 0. \tag{3.3.5}$$

设 l_∞^N 是所有实数列 $\{y_n\}_{n=N}^{\infty}$ 组成的集合，l_∞^N 上的范数是上确界范数，即 $\|y\| = \sup\limits_{n\geqslant N} |y_n|$.

$$S = \{y \in l_\infty^N : 0 \leqslant y_n \leqslant 1, n \geqslant N\},$$

定义如下算子：

$$(Ty)_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2z_n} + c\dfrac{z_{n-\tau}}{z_n} y_{n-\tau} + \dfrac{1}{z_n}\sum\limits_{i=N_1}^{n-1} (p_i z_{i-\sigma} y_{i-\sigma}), & n \geqslant N_1 + 1, \\ 1, & N \leqslant n \leqslant N_1, \end{cases} \tag{3.3.6}$$

其中 $N = N_1 - \max\{\tau, \sigma\}$，$N_1$ 足够大使得 $n \geqslant N_1$ 时

$$\left.\begin{aligned} & z_n \geqslant 1, \\ & c\frac{z_{n-\tau}}{z_n} < \frac{1}{2}, \\ & c\frac{z_{n-\tau}}{z_n} + \frac{1}{z_n}\sum_{i=N_1}^{n} p_i z_{i-\tau} \leqslant \frac{1}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{3.3.7}$$

注意到(3.3.4)和(3.3.5)式，N_1 确实是存在的. 由(3.3.6)和(3.3.7)式可得 $0 \leqslant (Ty)_n \leqslant 1$ 当 $n \geqslant N$ 时成立. 即 $TS \subseteq S$. 对于 $y, y^* \in S$，我们有

$$|(Ty)_n - (Ty^*)_n| \leqslant c\frac{z_{n-\tau}}{z_n} |y_{n-\tau} - y^*_{n-\tau}|$$

$$+\frac{1}{z_n}\sum_{i=N_1}^{n}p_iz_{i-\sigma}|y_{i-\sigma}-y_{i-\sigma}^*|.$$

于是

$$\|Ty-Ty^*\|\leqslant\sup_{n\geqslant N}|(Ty)_n-(Ty^*)_n|\leqslant\frac{1}{2}\|y-y^*\|.$$

即 T 是 S 上的压缩映射,因此有 $y\in S$ 使得 $Ty=y$.即

$$y_n=\begin{cases}\dfrac{1}{2z_n}+c\dfrac{z_{n-\tau}}{z_n}y_{n-\tau}+\dfrac{1}{z_n}\sum\limits_{i=N_1}^{n-1}p_iz_{i-\sigma}y_{i-\sigma}),\ n\geqslant N_1+1,\\ 1, \qquad\qquad N\leqslant n\leqslant N_1.\end{cases}$$

显然 $n\geqslant N$ 时,$y_n>0$.令 $x_n=y_nz_n>0$,则有,

$$x_n=\frac{1}{2}+cx_{n-\tau}+\sum_{i=N_1}^{n-1}p_ix_{i-\sigma},n\geqslant N_1+1. \tag{3.3.8}$$

这就证明了方程(3.3.1)有一个最终正解,证毕.

由定理3.3.1,可知如下推论:

推论3.3.1 (i)方程(3.3.1)存在正解$\{x_n\}$使得 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=l$,其中 l 是正常数或 $+\infty$;

(ii) $c=1$ 时,方程(3.3.1)有解$\{x_n\}$,满足$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$;

(iii) $c>1$ 时,方程(3.3.1)有解$\{x_n\}$满足 $x_n\geqslant c^{(n-n_0)/\tau}x_{n_0}$;

(iv) $0\leqslant c\leqslant 1$ 时 $\sum\limits_{i=n_0}^{\infty}p_i=\infty$,方程(3.3.1)有解$\{x_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$;

(v) $0<c<1$ 且 $\sum\limits_{i=n_0}^{\infty}p_i=\infty$ 时,方程(3.3.1)的所有有界解或者振动,或者当 n 趋于∞时趋于零.

证明 由(3.3.8)式可知

$$x_n\geqslant\frac{1}{2}+cx_{n-\tau}\geqslant\frac{1}{2}+c\left(\frac{1}{2}cx_{n-2\tau}\right)\geqslant\cdots,$$

则(i)和(ii)的情形得证.另一方面

$$x_n \geqslant cx_{n-\tau} \geqslant \cdots \geqslant c^l x_{n-l\tau},$$

因此(iii)成为事实.(iv)由(3.3.8)式可直接推出.为证明(v),我们设$\{x_n\}$是方程(3.3.1)的有界正解,则有

$$\Delta z_n \geqslant 0,\ \lim_{n\to\infty} z_n = l \text{ 有限},$$

其中

$$z_n = x_n - cx_{n-\tau}.$$

如果 $l>0$,那么有

$$l - z_{n_0} = \sum_{i=n_0}^{\infty} p_i x_{i-\sigma}.$$

即可得到 $\sum\limits_{i=n_0}^{\infty} p_i < \infty$. 这是一个矛盾.

如果 $l<0$,

$$x_n \leqslant cx_{n-\tau} \leqslant \cdots \leqslant c^k x_{n-k\tau},$$

则有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. 证毕.

例 3.3.1 考虑方程

$$\Delta(x_n - x_{n-1}) = p_n x_{n-1},\ n \geqslant 2. \tag{3.3.9}$$

其中 $p_n = (n^2-1)(n-1)$. 可知方程(3.3.9)有解$\{x_n\}$满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. 事实上,$x_n = n!$ 就是该方程的一个解.

当 $c<1$ 时,方程(3.3.1)会有趋于非零常数的解.

例 3.3.2 考虑方程

$$\Delta(x_n - 2x_{n-1}) = \frac{3}{n^2} x_{n-1}. \tag{3.3.10}$$

它有解 $x_n = 1 + \frac{1}{n}$.

§ 3.4 具有正负系数的差分方程

考察具有正负系数的差分方程

$$\Delta(y_n - cy_{n-m}) + p_n y_{n-k_1} - q_n y_{n-k_2} = 0, \tag{3.4.1}$$

其中 $m>0, k_1 \geqslant 0, k_2 \geqslant 0, \{p_n\}$ 和 $\{q_n\}$ 是非负数列.

定理 3.4.1 设 $c \in [0,1), p_n \geqslant 0, q_n > 0, k_1 > k_2 + 1, \overline{p_n} = p_n - q_{n-k_1+k_2} \geqslant 0$, $\sum_{i=n-k_1+k_2}^{n-1} q_i \leqslant 1 - c$, $\liminf_{n\to\infty} \sum_{i=n-k_1}^{n-1} \overline{p_i} > 0$, 且

$$\inf_{n>N,\lambda>0} \left\{ \frac{1}{\lambda} \prod_{i=n-k_1+1}^{n} (1-\lambda \bar{p}_{i-1})^{-1} + c \prod_{i=n-m+1}^{n} (1-\lambda \bar{p}_{i-1})^{-1} + \sum_{i=n-k_1}^{n-k_2-1} q_{i-k_1+k_2} \prod_{j=i+1}^{n} (1-\lambda \bar{p}_{j-1})^{-1} \right\} > 1. \tag{3.4.2}$$

则方程(3.4.1)振动.

证明 设 $\{y_n\}$ 是方程(3.4.1)的非振动解,因 $\{-y_n\}$ 也是方程(3.4.1)的一个解,因此设 $\{y_n\}$ 是(3.4.1)的最终正解. 设有 N 使得 $n \geqslant N$ 时 $y_n > 0$,令

$$z_n = y_n - cy_{n-m},$$
$$w_n = z_n - \sum_{i=n-k_1+k_2}^{n-1} q_i y_{i-k_2}, \tag{3.4.3}$$

则有

$$\begin{aligned} \Delta w_n &= \Delta z_n - q_n y_{n-k_2} + p_{n-k_1+k_2} y_{n-k_1} \\ &= (q_{n-k_1+k_2} - p_n) y_{n-k_1} \leqslant 0. \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

如果 $\lim_{n\to\infty} w_n = -\infty$,则 $\{y_n\}$ 无界. 于是有 $\{n_k\}$ 使得

$$\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = \infty.$$

其中 $y_{n_k} = \max_{N \leqslant n \leqslant n_k} y_{n_k}$. 另一方面

$$\begin{aligned} w_{n_k} &= y_{n_k} - cy_{n_k-m} - \sum_{i=n_k-k_1+k_2}^{n_k-1} q_i y_{i-k_2} \\ &\geqslant y_{n_k}\left(1 - c - \sum_{i=n_k-k_1+k_2}^{n_k-1} q_i\right) \geqslant 0. \end{aligned}$$

这是一个矛盾．因此$\lim\limits_{n\to\infty} w_n = l$ 有限．这时，如果$\{y_n\}$无界，则有 $l\geqslant 0$．如果$\{y_n\}$有界，令 $l = \limsup\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{s\to\infty} y_{n_s}$，则

$$y_{n_s} - w_{n_s} = c y_{n_s - m} + \sum_{i=n_s-k_1+k_2}^{n_s-1} q_i y_{i-k_2} \leqslant y_{n_t}\left(c + \sum_{i=n_s-k_1+k_2}^{n_s-1} q_i\right) \leqslant y_{n_t}, \tag{3.4.5}$$

其中 $y_{n_t} = \max\{y_i : i = n_s - k_1, \cdots, n_s - k_2 + 1, n_s - m\}$．(3.4.5)两边取上极限，有 $l - l \leqslant l$，即有 $l \geqslant 0$．于是当 $n \geqslant N$ 时 $w_n > 0$．

定义

$$\Lambda = \{\lambda > 0 : \Delta w_n + \lambda p_n w_n \leqslant 0\},$$

由(3.4.3)式可知，$w_n \leqslant y_n$．那么

$$\Delta w_n = -p_n y_{n-k_1} \leqslant -p_n w_{n-k_1} \leqslant -p_n w_n.$$

即 $\lambda = 1 \in \Lambda$ 且

$$\Delta \omega_n + p_n w_{n-k_1} \leqslant 0 \tag{3.4.6}$$

有最终正解．根据前面第二章的知识，可令

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{i=n-k_1}^{n-1} p_i = 3q < \left(\frac{k_1}{k_1+1}\right)^{k_1+1}, \tag{3.4.7}$$

其中 $q > 0$．同时由(3.4.6)式可知

$$\frac{w_{n-k_1}}{w_n} \leqslant \frac{1}{k^2}.$$

另一方面，由(3.4.4)式可知 $\sum\limits_{i=n}^{\infty} p_i y_{i-k} < \infty$．于是有 $\liminf\limits_{n\to\infty} y_{n-k_1} = 0$．则有$\{n_k\}$使得$\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k - k_1} = 0$．其中 $y_{n_k - k_1} = \min\limits_{n \leqslant n_k - k_1} y_n$．那么，

$$w_{n_k} - w_{n_k - k_1} = -\sum_{i=n_k-k_1}^{n_k-1} p_i y_{i-k_1} \leqslant -y_{n_k-k_1} \sum_{i=n_k-k_1}^{n_k-k_1} p_i \leqslant -2q y_{n_k-k_1}.$$

因此

$$w_{n_k+k_1} \geqslant 2q y_{n_k-k_1},$$

$$\Delta w_{n_k} = -p_{n_k} y_{n_k-k_1} \geqslant -\frac{1}{2q} p_{n_k} w_{n_k-k_1} \geqslant \frac{1}{2q^3} p_{n_k} w_{n_k},$$

即$\frac{1}{3q^2}\notin\Lambda$.这说明 Λ 是有上界的.

由(3.4.2)可知有 $\alpha>1$ 使得

$$\inf_{n\geqslant N,\lambda>1}\left\{\frac{1}{\lambda}\prod_{i=n-k_1+1}^{n}(1-\lambda p_{i-1})^{-1}+c\prod_{i=n-m+1}^{n}(1-\lambda p_{i-1})^{-1}\right.$$
$$\left.+\sum_{i=n-k_1}^{n-k_2-1}q_{i-k_1+k_2}\prod_{j=i+1}^{n}(1-\lambda p_{j-1})^{-1}\right\}\geqslant\alpha. \qquad (3.4.8)$$

令 $\lambda^*\in\Lambda$,可证 $\alpha\lambda^*\in\Lambda$.事实上,$\lambda^*\in\Lambda$ 有

$$\Delta w_n+\lambda^* p_n w_n\leqslant 0. \qquad (3.4.9)$$

定义

$$\sigma_n = w_n\prod_{i=N}^{n}(1-\lambda^* p_{i-1})^{-1}, \qquad (3.4.10)$$

由(3.4.9)式有 $w_{n+1}\leqslant(1-\lambda^* p_n)w_n$,从而可知$(1-\lambda^* p_n)>0$,于是(3.4.10)有意义.

$$\Delta\sigma_n = w_{n+1}\prod_{i=N}^{n+1}(1-\lambda^* p_{i-1})^{-1} - w_n\prod_{i=N}^{n}(1-\lambda^* p_{i-1})^{-1}$$
$$=\prod_{i=N}^{n+1}(1-\lambda^* p_{i-1})^{-1}[w_{n+1}-w_n(1-\lambda^* p_{i-1})]\leqslant 0.$$

可知$\{\sigma_n\}$非增.因此

$$0\geqslant\Delta w_n+\lambda^* p_n w_n = -p_n y_{n-k_1}+\lambda^* p_n w_n$$
$$= p_n(\lambda^* w_n - y_{n-k_1}),$$
$$\lambda^* w_n\leqslant y_{n-k_1},$$

$$\Delta w_n = -p_n y_{n-k_1} = -p_n\left[w_{n-k_1}+cy_{n-k_1-m}+\sum_{i=n+k_2-2k_1}^{n-k_1-1}q_i y_{i-k_2}\right]$$

$$\leqslant -p_n\Big[w_{n-k_1}+c\lambda^* w_{n-m}+\lambda^*\sum_{i=n+k_2-2k_1}^{n-k_1-1} q_i w_{i-k_1-k_2}\Big]$$

$$=-p_n\Big[w_{n-k_1}+c\lambda^* w_{n-m}+\lambda^*\sum_{j=n-k_1}^{n-k_2-1} q_{j-k_1+k_2} w_j\Big]$$

$$=-p_n\Big[\sigma_{n-k_1}\prod_{i=N}^{n-k_1}(1-\lambda^* p_{i-1})+c\lambda^*\sigma_{n-m}\prod_{i=N}^{n-m}(1-\lambda^* p_{i-1})$$

$$+\lambda^*\sum_{j=n-k_1}^{n-k_2-1} q_{j-k_1+k_2}\sigma_j\prod_{i=N}^{j}(1-\lambda^* p_{i-1})\Big]$$

$$\leqslant -p_n\sigma_n\Big[\prod_{i=N}^{n-k_1}(1-\lambda^* p_{i-1})+c\lambda^*\prod_{i=N}^{n-m}(1-\lambda^* p_{i-1})$$

$$+\lambda^*\sum_{j=n-k_1}^{n-k_2-1} q_{j-k_1+k_2}\prod_{i=N}^{j}(1-\lambda^* p_{i-1})\Big]$$

$$=-p_n w_n\Big[\prod_{i=n-k_1+1}^{n}(1-\lambda^* p_{i-1})^{-1}+c\lambda^*\prod_{i=n-m+1}^{n}(1-\lambda^* p_i)^{-1}$$

$$+\lambda^*\sum_{j=n-k_1}^{n-k_2-1} q_{j-k_1+k_2}\prod_{i=j+1}^{n}(1-\lambda^* p_{i-1})\Big].$$

上式与(3.4.8)式比较,则有

$$\Delta w_n\leqslant -\alpha\lambda^* p_n w_n. \tag{3.4.11}$$

即有 $\alpha\lambda^*\in\Lambda$. 重复如上过程有 $\alpha^k\lambda^*\in\Lambda$. 这矛盾于 Λ 有上界. 证毕.

$c=0$ 时,(3.1.4)变为

$$\Delta y_n+p_n y_{n-k_1}-q_n y_{n-k_2}=0; \tag{3.4.12}$$

$q_n\equiv 0$ 时,(3.4.1)变为

$$\Delta(y_n-cy_{n-m})+p_n y_{n-k_1}=0. \tag{3.4.13}$$

显然,定理 3.4.1 也适合于方程(3.4.12)和(3.4.13).

定理 3.4.2 $k_1>k_2+1, p_n\geqslant 0, q_n\geqslant 0, c\geqslant 0, \overline{p_n}\geqslant 0, \sum_{i=N}^{\infty}\overline{p_i}=\infty$，且有 N 和 $\lambda^*>0$ 使得 $i\geqslant N$ 时 $1-\lambda^*\overline{p_{i-1}}>0$.

$$\sup_{n\geqslant N}\left\{\frac{1}{\lambda^*}\prod_{i=n-k_1+1}^{n}(1-\lambda^*\overline{p_{i-1}})^{-1}+c\prod_{i=n-m+1}^{n}(1-\lambda^*\overline{p_{i-1}})^{-1}\right.$$
$$\left.\cdot\sum_{i=n-k_1}^{n-k_2-1}q_{i-k_1+k_2}\prod_{j=i+1}^{n}(1-\lambda^*\overline{p_{i-1}})^{-1}\right\}\leqslant 1. \qquad (3.4.14)$$

则(3.4.1)有一个最终正解 $\{y_n\}$ 满足 $\lim_{n\to\infty}y_n=0$.

证明 令，$z_n=\prod_{i=N}^{n+k_1}(1-\lambda^*\overline{p_{i-1}})$.

显然，z_n 是可定义的且 $\lim_{n\to\infty}z_n=0$. 代入(3.4.14)有

$$\frac{1}{\lambda^*}\frac{z_{n-k_1}}{z_n}+c\frac{z_{n-m}}{z_n}+\sum_{i=n}^{n+k_1-k_2-1}q_{i-k_1+k_2}\frac{z_{i-k_1}}{z_n}\leqslant 1. \qquad (3.4.15)$$

由(3.4.3)知，$\Delta z_n=-\lambda^*\overline{p_{n+k_1}}z_n$，

$$\sum_{i=n-k_1}^{\infty}\overline{p_{n+k_1}}z_i=-\frac{1}{\lambda^*}\sum_{i=n+k_1}^{\infty}\Delta z_i=\frac{z_{i-k_1}}{\lambda^*}. \qquad (3.4.16)$$

比较(3.4.15)和(3.4.16)有

$$\sum_{i=n-k_1}^{\infty}\overline{p_{n+k_1}}z_i+cz_{n-m}+\sum_{i=n}^{n+k_1-k_2-1}q_{i-k_1+k_2}z_{i-k_1}\leqslant z_n. \quad (3.4.17)$$

设 X 是 l_∞^N 的所有有界实数列构成的集合，在其上定义上确界范数，并定义序$\leqslant$：$x,y\in X, x\leqslant y$，是指 $i\geqslant N$ 时，$x_i\leqslant y_i$.

$$\Omega=\{x\in X, 0<x_n\leqslant z_n, n\geqslant N\}.$$

在 Ω 上定义如下算子，当 $n\geqslant N+M+1$ 时，

$$(Sw)_n=cw_{n-m}+\sum_{i=n}^{n+k_1-k_2-1}q_{i-k_1+k_2}w_{i-k_1}+\sum_{i=n-k_1}^{\infty}p_{n+k_1}w_i,]$$

$$(Sw)_n=z_n\left(1-\frac{n}{N+M+1}\right), N\leqslant n\leqslant N+M.$$

显然,$S\Omega\subseteq\Omega$ 且 S 非减. $x,y\in\Omega$, $x\leqslant y$ 时有 $Sx\leqslant Sy$. 由 Knaster 不动点定理可知,有 $x\in\Omega$ 使得 $Sx=x$. 且易知 $x_n>0$, $N\leqslant n\leqslant N+M$. 从而 $n\geqslant N$, $z_n\geqslant x_n>0$. 不难看出 $\{x_n\}$ 是(3.4.1)的一个解. 证毕.

定理 3.4.3　若定理 3.4.1 的条件成立,则(3.4.1)振动的充要条件是

$$\Delta(y_n - cy_{n-m}) + p_n y_{n-k_1} - q_n y_{n-k_2} \leqslant 0 \qquad (3.4.18)$$

无最终正解.

证明　设 $\{y_n\}$ 是(3.4.18)的一个最终正解,w_n 由(3.4.3)定义. 类似定理 3.4.1 的证明,有 $w_n>0$, $\Delta w_n\leqslant 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$. 因此 $\sum\limits_{i=N}^{\infty} p_i y_{i-k_1}<\infty$. 对(3.4.18)求和,则有

$$\begin{aligned} y_n - cy_{n-m} &\geqslant \sum_{i=n}^{\infty} p_i y_{i-k_1} - \sum_{i=n}^{\infty} q_i y_{i-k_2} \\ &= \sum_{i=n}^{\infty} \overline{p}_i y_{i-k_1} - \sum_{i=n+k_1-k_2}^{\infty} q_{i-k_1+k_2} y_{i-k_1} \\ &= \sum_{i=n}^{\infty} \overline{p}_i y_{i-k_1} + \sum_{i=n}^{n+k_1-k-1} q_{i-k_1+k_2} y_{i-k_1}. \end{aligned}$$

类似定理 3.4.2 证明的后半部分可知

$$cx_{n-m} + \sum_{i=n-k_1}^{\infty} \overline{p_{i+k_1}} x_i + \sum_{i=n}^{n+k_1-k-1} q_{i-k_1+k_2} x_{i-k_1} = x_i$$

有一个正解 $\{x_n\}$,它是(3.4.1)的解. 证毕.

§3.5　非线性差分方程的单调解

考虑差分方程

$$\Delta x_n - b_n \Delta x_{n-\sigma} + \sum_{i=1}^{k} p_i(n) \prod_{j=1}^{m_i} |x_{n-\tau_{ij}(n)}|^{\alpha_{ij}} \operatorname{sgn} x_{n-\tau_{ij}(n)} \leqslant 0,\ n\geqslant 0, \qquad (3.5.1)$$

其中 σ 是正整数,$\{b_n\}$,$\{p_1(n)\}$,…,$\{p_k(n)\}$是非负实数列,α_{11},…,α_{km_k}是非负实数列且满足

$$\sum_{j=1}^{m_i}\alpha_{ij} = 1, i = 1,2,\cdots,k,$$

$\tau_{11}(n)$,…,$\tau_{km_k}(n)$是 $n\geqslant 0$ 上的非负整数值函数,满足 $\tau_{11}(n)\leqslant n$,$\tau^* = \max\{\sigma, \{\tau_{ij}(n) \mid 1\leqslant i\leqslant k, 1\leqslant j\leqslant m_k, n\geqslant 0\}\}$是一个非负整数.

注意到,如果$\{q_n\}$是正数列,$\{y_n\}$是方程

$$\Delta(y_n - p_n y_{n-\sigma}) + q_n y_{n-\tau} = 0 \tag{3.5.2}$$

的一个解.令

$$z_n = y_n - p_n y_{n-\sigma},$$

代入方程(3.5.2)中,有

$$\Delta z_n + q_n y_{n-\tau} = \Delta z_n + q_n z_{n-\tau} + q_n p_{n-\tau} y_{n-\sigma-\tau} = 0.$$

因此有

$$\Delta z_n - \frac{q_n p_{n-\tau}}{q_{n-\sigma}}\Delta z_{n-\sigma} + q_n z_{n-\tau} = 0.$$

因此,(3.5.1)也包含了(3.5.2).

设$\{x_n\}$是(3.5.1)的一个最终正解,则有 $N\geqslant\tau^*$,使 $N\geqslant N-\tau^*$ 时 $x_n>0$.定义

$$w_n = -\frac{\Delta x_n}{x_n}, \quad n\geqslant N-\tau^*,$$

那么$\{w_n\}_{n=N}^{\infty}$是严格 Subnormal 的.

$$0 < \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1-\omega_n, \quad n\geqslant N-\tau^*,$$

$$\frac{\Delta x_{n-\sigma}}{x_n} = -w_{n-\sigma}(1-w_{n-\sigma})^{-1}\cdots(1-w_{n-1})^{-1}, \quad n\geqslant N,$$

$$\frac{x_n}{x_{n-\tau_{ij}(n)}} = (1-w_{n-1})\cdots(1-w_{n-\tau_{ij}(n)}), \quad n\geqslant N.$$

代入(3.5.1)有

$$\omega_n \geqslant b_n w_{n-\sigma} \prod_{i=n-\sigma}^{n-1} \frac{1}{1-w_i} + \sum_{i=1}^{k} p_i(n) \prod_{j=1}^{m_i} \prod_{s=n-\tau_{ij}(n)}^{n-1} \frac{1}{(1-w_s)^{\alpha_{ij}}}, n \geqslant N. \tag{3.5.3}$$

定理 3.5.1 方程(3.5.1)有一个最终非增正解的充要条件是(3.5.3)有一个最终严格 Subnormal 非负解.

证明 设$\{w_n\}$是(3.5.3)的一个最终严格 Subnormal 非负解,则有 N 存在,使得当 $n \geqslant N$ 时 $0 \leqslant w_n < 1$. 令 $x_N = 1$,

$$x_{n+1} = \prod_{i=N}^{n}(1-w_i), \quad n \geqslant N.$$

它是(3.5.1)的一个最终正解,且满足

$$\Delta x_n = -w_n \prod_{i=N}^{n-1}(1-w_i) \leqslant 0.$$

证毕.

定义序列$\{w^{(t)}\}$: $w^0 = 0, n \geqslant 0, t = 0, 1, 2, \cdots$,

$$\omega_n^{(t+1)} = b_n w_{n-\sigma}^{(t)} \prod_{i=n-\sigma}^{n-1} \frac{1}{1-w_i^{(t)}} + \sum_{i=1}^{k} p_i(n) \prod_{j=1}^{m_i} \prod_{s=n-\tau_{ij}(n)}^{n-1} \frac{1}{(1-w_s^{(t)})\alpha_{ij}}, \tag{3.5.4}$$

其中 $n \geqslant N \geqslant \tau^*$,而 $n \leqslant N$ 时,$w_n^{(t+1)} = 0$.

为方便起见,我们称$\{w_n^{(t)}\}$为(3.5.1)的伴随序列.

定理 3.5.2 (3.5.3)在 $n \geqslant N-\tau^* \geqslant 0$ 有一个严格 Subnormal 非负解$\{w_n\}$的充要条件是:方程(3.5.1)的伴随序列$\{w_n^{(t)}\}$对 $t \geqslant 0$, $n \geqslant N$均是严格 Subnormal 且非负,同时$\{w_n^{(t)}\}$在 $n \geqslant N$ 上收敛到一个严格 Subnormal 非负数列$\{u_n\}$.

证明 如果 $n \geqslant N-\tau^*$, $0 \leqslant w_n < 1$,则(3.5.1)的伴随序列$\{w^{(t)}\}$满足

$$w_n^{(0)} = 0 \leqslant w_n < 1, \quad n \geqslant N-\tau^*.$$

所以

$$\frac{1}{(1-w_s^{(0)})^{\alpha_{ij}}}\leqslant\frac{1}{(1-w_s)^{\alpha_{ij}}},\quad n\geqslant N-\tau^*.$$

$$w_n^{(0)}=0\leqslant w_n^{(1)}$$

$$=b_nw_{n-\sigma}^{(0)}\prod_{i=n-\sigma}^{n-1}\frac{1}{1-w_i^{(0)}}+\sum_{i=1}^{k}p_i(n)\prod_{j=1}^{m_i}\prod_{s=n-\tau_{ij}(n)}^{n-1}\frac{1}{(1-w_s^{(0)})^{\alpha_{ij}}}$$

$$\leqslant b_nw_{n-\sigma}\prod_{i=n-\sigma}^{n-1}\frac{1}{1-w_j}+\sum_{i=1}^{k}p_i(n)\prod_{j=1}^{m_i}\prod_{s=n-\tau_{ij}(n)}^{n-1}\frac{1}{(1-w_s^{(0)})^{\alpha_{ij}}}$$

$$\leqslant w_n,\quad n\leqslant N. \tag{3.5.5}$$

归纳可知,

$$w_n^{(0)}\leqslant w_{n0}^{(1)}\leqslant\cdots\leqslant w_n<1,\quad n\geqslant N.$$

相反,$n\geqslant N,t\geqslant 0,w_n^{(t)}$ 是严格 Subnormal 且 $\{w_n^{(t)}\}$ 收敛到一个非负严格 Subnormal 数列 $\{u_n\}_{n=N}^{\infty}$. 如前可证

$$w_n^{(0)}\leqslant w_n^{(1)}\leqslant w_n^{(2)}\leqslant\cdots\leqslant u_n<1,\quad n\geqslant N.$$

由 Lebesque 控制定理,对(3.5.4)式取极限,有

$$u_n=b_nu_{n-\sigma}\prod_{i=n-\sigma}^{n-1}\frac{1}{1-u_i}+\sum_{i=1}^{k}p_i(n)\prod_{j=1}^{m_i}\prod_{s=n-\tau_{ij}(n)}^{n-1}\frac{1}{(1-u_s)^{\alpha_{ij}}},n\geqslant N. \tag{3.5.6}$$

证毕.

利用定理 3.5.2,还可得出如下结论.

定理 3.5.3 方程(3.5.1)有一个最终非增正解的充要条件是方程

$$\Delta x_n-b_n\Delta x_{n-\sigma}+\sum_{i=1}^{k}p_i(n)\prod_{j=1}^{m_i}|x_{n-\tau_{ij}(n)}|^{\alpha_{ij}}\operatorname{sgn}x_{n-\tau_{ij}(n)}=0,n\geqslant 0 \tag{3.5.7}$$

有一个最终非增正解.

当 $b_n\equiv b,p_i(n)\equiv p_i,\tau_{ij}(n)\equiv\tau_{ij}$,(3.5.1)变为

$$\Delta x_n - b x_{n-\sigma} + \sum_{i=1}^{k} p_i \prod_{j=1}^{m_i} |x_{n-\tau_{ij}}|^{\alpha_{ij}} \operatorname{sgn} x_{n-\tau_{ij}} \leqslant 0, n \geqslant 0. \tag{3.5.8}$$

这时对充分大的 N, $\{w_n^{(0)}\}_{n=N}^{\infty}$变成常数列$\{0\}$, $\{w_n^{(1)}\}_{n=N}^{\infty}$变成常数列$\{w^{(1)}\}$并令 $w^{(1)}=\lambda_1$, $\lambda_0=0$,则有

$$\lambda_1 = \sum_{i=1}^{k} p_i > 0.$$

$$\lambda_{t+1} = \frac{b\lambda_t}{(1-\lambda_t)^{\sigma}} + \sum_{i=1}^{k} p_i (1-\lambda_t)^{-\sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij}\tau_{ij}}, \quad t \geqslant 0. \tag{3.5.9}$$

那么序列$\{w_n^{(t)}\}$变成常数序列$\{\lambda_t\}$. 这时,如果(3.5.8)有一个非增的最终正解,由定理 3.5.2 知 $0<\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots<1$ 且$\{\lambda_t\}$收敛到(0,1)内一值,同时,逆命题也成立.

定理 3.5.4 (3.5.8)有一个非增的最终正解,当且仅当$\{\lambda_t\}$满足

$$0 = \lambda_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant, \cdots, < 1,$$

且收敛于(0,1).

如果(3.5.8)有一个非增最终正解 .(3.5.9)两边取极限,则有

$$\lambda = \frac{b\lambda}{(1-\lambda)^{\sigma}} + \sum_{i=1}^{k} p_i (1-\lambda)^{-\sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij}\tau_{ij}} \tag{3.5.10}$$

在(0,1)有根 λ^*. 相反,(3.5.10)在(0,1)有根 λ^*,那么

$$0 < \lambda_1 = \sum_{i=1}^{k} p_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} p_i (1-\lambda^*)^{-\sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij}\tau_{ij}} \leqslant \lambda^*,$$

归纳可知 $t\geqslant 2$, $\lambda_t \leqslant \lambda^*$. 因此, $\{\lambda_t\}$收敛于$(0,\lambda^*]$. 即(3.5.8)有一个非增最终正解.

利用定理 3.5.1. 可知如下结果.

推论 3.5.1 如果有常数 $w\in[0,1)$和 $N\geqslant\tau^*$使得

$$w \geqslant \frac{wb_n}{(1-w)^\sigma} + \sum_{i=1}^{k} p_i(n)(1-w)^{-\sum_{j=1}^{m_i}\alpha_{ij}\tau_{ij}}, \quad n \geqslant N, \tag{3.5.11}$$

则方程(3.5.1)有一个非增最终正解.

由定理3.5.1和定理3.5.2可知

推论 3.5.2 如果对任意的 $N\geqslant\tau^*$ 有某一 $n\geqslant N$ 及 $t\geqslant 0$ 使得 $w_n^{(t)}\geqslant 1$，则方程(3.5.1)无最终非增正解.

这样一来，如果对任意的 $N\geqslant\tau^*$ 有某一 $n\geqslant N$ 使得

$$w_n^{(1)} = \sum_{i=1}^{k} p_i(n) \geqslant 1,$$

则(3.5.1)无最终非增正解.

定理 3.5.5 设有 τ 存在，使得

$$0 \leqslant \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{ij}\tau_{ij}(n) \leqslant \tau, \quad n \geqslant N-\tau^* \geqslant 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant k,$$

$$\mu_1 = \inf_{n\geqslant N-\tau^*} \sum_{i=1}^{k} p_i(n) > 0,$$

且

$$\inf_{n\geqslant N-\tau^*, 0<\mu<1} \frac{1}{\mu}\left\{\frac{\mu b_n}{(1-\mu)^\sigma} + \sum_{i=1}^{k} p_i(n)(1-\mu)^{-\sum_{j=1}^{m_i}\alpha_{ij}\tau_{ij}(n)}\right\} > 1, \tag{3.5.12}$$

则方程(3.5.1)无最终非增正解.

证明 设$\{w_n^{(t)}\}$是方程(3.5.1)的伴随序列，由定理3.5.2可知对于 $n\geqslant N$，$w_n^{(t)}$ 是非负 Subnormal. 令

$$\mu_1 = \inf_{n\geqslant N-\tau^*} w_n^{(1)} = \inf_{n\geqslant N-\tau^*} \sum_{i=1}^{k} p_i(n) \geqslant 0,$$

那么

$$w_n^{(2)} = b_n w_{n-\sigma}^{(1)} \prod_{i=n-\sigma}^{k} \frac{1}{1-w_i^{(1)}} + \sum_{i=1}^{k} p_i(n) \prod_{j=1}^{m_i} \prod_{s=n-\tau_{ij}(n)}^{n-1} \frac{1}{(1-w_s^{(1)})^{\alpha_{ij}}}$$

$$\geqslant \frac{\mu_1 b_n}{(1-\mu_1)^{\sigma}} + \sum_{i=1}^{k} p_i(n)(1-\mu_1)^{-\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}\tau_{ij}}, \quad n \geqslant N.$$

且 $w_n^{(2)} \geqslant \mu_2, n \geqslant N-\tau^*$,其中

$$\mu_2 = \inf_{n \geqslant N-\tau^*}\left\{\frac{\mu_1 b_n}{(1-\mu_1)^{\sigma}} + \sum_{i=1}^{k} p_i(n)(1-\mu_1)^{-\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}\tau_{ij}(n)}\right\}.$$

由归纳法可知

$$\mu_{t+1} = \inf_{n \geqslant N-\tau^*}\left\{\frac{\mu_t b_n}{(1-\mu_t)^{\sigma}} + \sum_{i=1}^{k} p_i(n)(1-\mu_t)^{-\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}\tau_{ij}(n)}\right\}, t \geqslant 0, \tag{3.5.13}$$

则

$$w_n^{(t)} \geqslant \mu_t,\ n \geqslant N-\tau^*,\ t \geqslant 1. \tag{3.5.14}$$

由上式可知,如果对于 $t \geqslant 1$ 有 $\mu_t \geqslant 1$,则结论成立.假设对 $t \geqslant 1, \mu_t < 1$.则有 $0 < \mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \cdots < 1$.确实,由假设知 $\mu_1 > 0$,从而

$$\mu_2 = \inf_{n \geqslant N-\tau^*}\left\{\frac{\mu_1 b_n}{(1-\mu_1)^{\sigma}} + \sum_{i=1}^{k} p_i(n)(1-\mu_1)^{-\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}\tau_{ij}(n)}\right\}$$

$$\geqslant \inf_{n \geqslant N-\tau^*} \sum_{i=1}^{k} p_i(n) = \mu_1.$$

归纳可知,$0 < \mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \cdots < 1$.令 $\lim_{t\to\infty} \mu_t = \mu^*$,如果 $\mu^* < 1$,由(3.5.13)可知

$$\mu^* = \inf_{n \geqslant N-\tau^*}\left\{\frac{\mu^* b_n}{(1-\mu^*)^{\sigma}} + \sum_{i=1}^{k} p_i(n)(1-\mu^*)^{-\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}\tau_{ij}(n)}\right\},$$

这矛盾于(3.5.12).因此 $\mu^* = 1$,这由(3.5.14)可知 $w_n^{(\infty)} \geqslant 1$.由定理 3.5.2 可知(3.5.1)无最终非增正解.证毕.

对于固定的 $n \geqslant N$,

$$\inf_{0<\mu<1}\left\{\frac{1}{\mu} p_i(n)(1-\mu)^{-\sum_{j=1}^{m_i} a_{ij}\tau_{ij}(n)}\right\}$$

在 $\mu_i=(1+\sum_{j=1}^{m_i}\alpha_{ij}\tau_{ij}(n))^{-1}$达到

$$\frac{p_i(n)(1+\tau_i(n))^{1+\tau_i(n)}}{(\tau_i(n))^{\tau_i(n)}},$$

其中 $\tau_i(n)=\sum_{j=1}^{m_i}\alpha_{ij}\tau_{ij}(n)<\infty,1\leqslant i\leqslant k$. 因此,如果

$$\liminf_{n\to\infty}\left(b_n+\sum_{i=1}^{k}\frac{p_i(n)(1+\tau_i(n))^{1+\tau_i(n)}}{(\tau_i(n))^{\tau_i(n)}}\right)>1,$$

则(3.5.1)无最终非增正解.

利用算术平均值和几何平均值的关系,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{k}p_i(n)(1-\mu)^{-\tau_i(n)}\\ \geqslant&\frac{k}{\mu}\left(\prod_{i=1}^{k}p_i(n)\right)^{\frac{1}{k}}\cdot\left(\prod_{i=1}^{k}(1-\mu)^{-\tau_i(n)}\right)^{\frac{1}{k}}\\ \geqslant&k\left(\prod_{i=1}^{k}p_i(n)\right)^{\frac{1}{k}}\cdot\left(\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{\mu(1-\mu)^{\tau_i(n)}}\right)^{\frac{1}{k}},\end{aligned}$$

而

$$\inf_{0<\mu<1}\frac{1}{\mu(1-\mu)^{\tau_i(n)}}=\frac{(\tau_i(n)+1)^{\tau_i(n)+1}}{(\tau_i(n))^{\tau_i(n)}}.$$

因此,当 $p_1(n)+\cdots+p_k(n)$有正子列时,

$$\liminf_{n\to\infty}\left\{b_n+k\left(\sum_{i=1}^{k}p_i(n)\right)^{\frac{1}{k}}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{(\tau_i(n)+1)^{\tau_i(n)+1}}{(\tau_i(n))^{\tau_i(n)}}\right)\right\}>1,$$

则(3.5.1)无最终非增正解.

定理 3.5.6 如果有常数 $\Psi\in(0,1)$使得,

$$\sup_{n\geqslant N-\tau^*\geqslant 0}\frac{1}{\Psi}\left\{\frac{\Psi b_n}{(1-\Psi)^{\sigma}}+\sum_{i=1}^{k}p_i(n)(1-\Psi)^{-\sum_{j=1}^{m_i}\alpha_{ij}\tau_{ij}(n)}\right\}\leqslant 1,\tag{3.5.15}$$

则(3.5.1)有最终非增正解.

证明　设$\{w_n^{(t)}\}$是(3.5.1)的伴随序列，令

$$\Psi_1 = \sup_{n\geq N-\tau^*} w_n^{(1)} = \inf_{n\geq N-\tau^*} \sum_{i=1}^{k} p_i(n) \geq 0,\ N-\tau^* \geq 0.$$

由(3.5.15)可知，$0\leqslant\Psi_1\leqslant\Psi$，

$$w_n^{(2)} = b_n w_{n-\sigma}^{(1)} \prod_{i=n-\sigma}^{n-1} \frac{1}{1-w_i^{(1)}} + \sum_{i=1}^{k} p_i(n) \prod_{j=1}^{m_i} \prod_{s=n-\tau_{ij}(n)}^{n-1} \frac{1}{(1-w_s^{(1)})^{\alpha_{ij}}}$$

$$\leqslant \frac{\Psi_1 b_n}{(1-\Psi_1)^{\sigma}} + \sum_{i=1}^{k} p_i(n)(1-\Psi_1)^{-\sum_{j=1}^{m_i}\alpha_{ij}\tau_{ij}(n)},\quad n\geqslant N.$$

$$w_n^{(2)} \leqslant \Psi_2,\quad n\geqslant N-\tau^*,$$

其中

$$\Psi_2 = \sup_{n\geq N-\tau^*}\left\{\frac{\Psi_1 b_n}{(1-\Psi_1)^{\sigma}} + \sum_{i=1}^{k} p_i(n)(1-\Psi_1)^{-\sum_{j=1}^{m_i}\alpha_{ij}\tau_{ij}(n)}\right\}.$$

归纳可知

$$\Psi_{t+1} = \sup_{n\geq N-\tau^*}\left\{\frac{\Psi_5 b_n}{(1-\Psi_5)^{\sigma}} + \sum_{i=1}^{k} p_i(n)(1-\Psi_t)^{-\sum_{j=1}^{m_i}\alpha_{ij}\tau_{ij}(n)}\right\},t\geqslant 0,$$

则

$$w_n^{(t)} \leqslant \Psi_t,\quad n\geqslant N-\tau^*,\ t\geqslant 1.$$

利用(3.5.15)式，容易得到$0\leqslant\Psi_1\leqslant\Psi_2\leqslant\cdots\leqslant\Psi$. 从而可知$w_t^{(n)}\leqslant\Psi_t\leqslant\Psi$，于是当$n\geqslant N$时有$w_n^{(\infty)}\leqslant\Psi<1$. 证毕.

应用前面结果，也可给出对应的比较结果，为此考虑比较不等式

$$\Delta y_n - B_n\Delta y_{n-\xi} + \sum_{i=1}^{k} p_i(n)\prod_{j=1}^{m_i}\left|y_{n-\sigma_{ij}(n)}\right|^{\alpha_{ij}}\operatorname{sgn} y_{n-\sigma_{ij}(n)} \leqslant 0,$$
(3.5.16)

其中$\{B_n\}$是实数列，$\{P_1(n)\},\cdots,\{P_k(n)\}$是非负实数列，$\xi$是正整数，$\sigma_{11}(n),\cdots,\sigma_{km_k(n)}$与$\tau_{ij}(m)$满足类似的条件. 类似于(3.5.3)式，也可定义方程(3.5.16)的伴随序列为

$$w_n^{(0)} = 0, \quad n \geqslant 0,$$

当 $t=0,1,\cdots,n\geqslant N$ 时，令

$$w_n^{(t+1)} = B_n w_{n-\xi}^{(1)} \prod_{i=n-\xi}^{n-1} \frac{1}{1-w_i^{(t)}} + \sum_{i=1}^{k} P_i(n) \prod_{j=n-\sigma_j(n)}^{n-1} \frac{1}{(1-w_j^{(t)})^{\sigma_{ij}}},$$

$$w_n^{(t+1)} = 0, \quad n \leqslant N.$$

定理 3.5.7 如果 $n\geqslant 0$ 时有 $\sigma\leqslant\xi, b_n\leqslant B_n$,

$$\tau_{ij}(n) \leqslant \sigma_{ij}(n),\ p_i(n) \leqslant P_i(n),\ 1\leqslant i\leqslant k,\ 1\leqslant j\leqslant m_k,$$

(3.5.16)有一个最终非增正解，则方程(3.5.1)也有最终非增正解.

§3.6 振动解与非振动解的存在性

这一节将考虑方程

$$\Delta(x_n - cx_{n-m}) + p_n x_{n-k_1} - q_n x_{n-k_2} = 0, n = 0,1,2,\cdots \tag{3.6.1}$$

和

$$\Delta(x_n - cx_{n-m}) = p_n x_{n-k_1} - q_n x_{n-k_2} = 0, n = 0,1,2,\cdots, \tag{3.6.2}$$

其中 $c>0$ 是常数，m 和 k_1 是正整数，k_2 是非负整数且满足 $k_1\geqslant k_2$，$\{p_n\}$ 和 $\{q_n\}$ 是非负实数列.

首先给出几个引理，它们对后面定理的建立是必要的.

引理 3.6.1

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=N+jm}^{\infty} p_i < \infty \tag{3.6.3}$$

成立的充要条件是

$$\sum_{i=a}^{\infty} ip_i < \infty. \tag{3.6.4}$$

确实

$$\sum_{i=N}^{\infty} ip_i = N\sum_{i=N}^{\infty} p_i - \sum_{i=N}^{\infty}\sum_{j=i+1}^{\infty} p_j.$$

因此,(3.6.4)成立当且仅当

$$\sum_{i=N}^{\infty}\sum_{j=i}^{\infty} p_i < \infty,$$

而

$$\sum_{i=N}^{\infty}\sum_{j=i}^{\infty} p_j = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=N+jm}^{\infty} p_i.$$

引理 3.6.2 假设

$$\sum_{i=N}^{\infty} ip_i < \infty, \tag{3.6.5}$$

$$\sum_{i=N}^{\infty} q_i < \infty, \tag{3.6.6}$$

$\{\omega_n\}$是任一 m 周期振动数列,$M=\min_{n\geq N}\{\max\omega_n, \max(-\omega_n)\}$, $\alpha\in(0,1)$, $\bar{M}=\max_{n\geq N}|\omega_n|$. 则方程

$$\Delta(x_n - x_{n-m}) + p_n(x_{n-k_1} + 2\bar{M} + \omega_{n-k_1}) - q_n(x_{n-k_1} + 2\bar{M} + \omega_{n-k_1}) = 0 \tag{3.6.7}$$

和

$$\Delta(x_n - x_{n-m}) + p_n(x_{n-k_1} + 2\bar{M}) - q_n(x_{n-k_2} + 2\bar{M}) = 0 \tag{3.6.8}$$

分别有有界正解$\{\bar{u}_n\}$和$\{u_n\}$满足

$$|\bar{u}_n| \leqslant \frac{\alpha}{2}M, \quad |u_n| \leqslant \frac{\alpha}{2}M.$$

证明 只给出关于方程(3.6.8)的证明,(3.6.7)类似可证. 选择 N 足够大,使得

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=N+im}^{\infty} p_j + r\sum_{i=n-k_1}^{\infty} q_i < \frac{\alpha M}{16\bar{M}}, \tag{3.6.9}$$

其中 $r=\left[\frac{k_1-k_2}{m}\right]+2$. 令

$$H_n=\begin{cases}4\bar{M}\sum_{i=n}^{\infty}p_i+4\bar{M}\sum_{i=n-k_1+k_2}^{n-1}q_i, & n\geqslant N,\\(n-N+m)\dfrac{H_N}{m}, & N-m\leqslant n<N,\\0, & n\leqslant N-m.\end{cases}$$

显然, $H_n\geqslant 0$. 定义

$$y_n=\sum_{i=0}^{\infty}H_{n-im},\quad n\geqslant N.$$

则有 $y_n-y_{n-m}=H_n$ 且 $n\geqslant N$ 时 $0<y_n<\frac{\alpha}{4}M<M$.

设 X 是所有有界实数列 $x=\{x_n\}_{n=N}^{\infty}$ 构成的集合, 在其上定义上确界范数, 则 X 构成一个 Banach 空间, 令

$$\Omega=\{x_n\in X\mid 0\leqslant x_n\leqslant y_n, n\geqslant N\},$$

并在 Ω 上定义算子

$$(Tx)_n=$$

$$\begin{cases}x_{n-m}+\sum_{i=n-k_1+k_2}^{n-1}q_i(x_{i-k_2}+2\bar{M})+\sum_{i=n}^{\infty}p_i(x_{i-k_1}+2\bar{M}), & n\geqslant N+L,\\\dfrac{ny_n(Tx)_{N+L}}{(N+L)y_{N+L}}+y_n\left(1-\dfrac{n}{N+1}\right), & N\leqslant n<N+L,\end{cases}$$

其中 $L=\max\{m,k_1\}$.

对于 $x\in\Omega$, 显然有

$$(Tx)_n\leqslant y_{n-m}+H_n=y_n,\quad n\geqslant N+L,$$

$$(Tx)_n\leqslant y_n,\quad N\leqslant n<N+L.$$

因此有 $T\Omega\subseteq\Omega$.

定义序列 $x^{(l)}, l=0,1,\cdots$, 其中

$$x_n^{(0)}=y_n, x_n^{(l)}=(Tx^{(l-1)})_n.$$

由归纳可知满足

$$0 < x_n^{(l)} \leqslant x_n^{(l-1)} \leqslant y_n, \quad n \geqslant N, l = 1,2,\cdots,$$

于是有$\{u_n\} \in \Omega$使得$\lim\limits_{l \to \infty} x_n^{(l)} = u_n$, $n \geqslant N$. 显然当$n \geqslant N$时$u_n > 0$且有$Tu = u$. 它是方程(3.6.8)的一个解并满足$0 < u_n \leqslant \frac{\alpha}{4}M$. 证毕.

类似于引理3.6.2,也有如下结果:

引理 3.6.3　假设(3.6.5)和(3.6.6)成立,$\{\omega_n\}$, M, α, $\bar{M}$同引理3.6.2中的一样,则方程

$$\Delta(x_n - x_{n-m}) = p_n(x_{n-k_1} + 2\bar{M} + \omega_{n-k_1}) - q_n(x_{n-k_2} + 2\bar{M} + \omega_{n-k}) \tag{3.6.10}$$

和

$$\Delta(x_n - x_{n-m}) = p_n(x_{n-k_1} + 2\bar{M}) - q_n(x_{n-k_2} + 2\bar{M}) \tag{3.6.11}$$

分别有有界正解$\{\bar{u}_n\}$和$\{u_n\}$满足

$$|\bar{u}_n| \leqslant \frac{\alpha}{2}M, \qquad |u_n| \leqslant \frac{\alpha}{2}M.$$

证明省略.

引理 3.6.4　已知(3.6.6)成立,$c \in (0,1)$,且有

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=N+im}^{\infty} c^{\frac{j-N-im}{m}} p_j < \infty, \tag{3.6.12}$$

则方程

$$\begin{aligned} &\Delta(x_n - x_{n-m}) + p_n\left(x_{n-k_1} + (2\bar{M} + \omega_{n-k_1})c^{\frac{n-k_1}{m}}\right) \\ &\quad - q_n\left(x_{n-k_2} + (2\bar{M} + \omega_{n-k})c^{\frac{n-k_2}{m}}\right) = 0 \end{aligned} \tag{3.6.13}$$

和

$$\Delta(x_n - x_{n-m}) + p_n\left(x_{n-k_1} + 2\bar{M}c^{\frac{n-k_1}{m}}\right) - q_n\left(x_{n-k_2} + (2\bar{M}c^{\frac{n-k_2}{m}}\right) = 0 \tag{3.6.14}$$

分别有有界正解 $\{\bar{u}_n\}$ 和 $\{u_n\}$ 满足

$$|\bar{u}_n| \leqslant \frac{\alpha}{2}Mc^{\frac{n}{m}}, \qquad |u_n| \leqslant \frac{\alpha}{2}M.$$

证明　只对方程(3.6.14)的结论给出证明. 考虑方程

$$x_n = cx_{n-m} + \sum_{i=n-k_1}^{n-k_2} q_{i+k_2}(x_i + 2\bar{M}c^{\frac{i}{m}}) + \sum_{i=n}^{\infty} p_i(x_{i-k_1} + 2\bar{M}c^{\frac{i-k_1}{m}}). \tag{3.6.15}$$

令 $z_n = x_n c^{-\frac{n}{m}}$, (3.6.15)变为

$$z_n = z_{n-m} + \sum_{i=n-k_1}^{n-k_2} (q_i + k_2(z_i + 2\bar{M})c^{\frac{i-n}{m}})$$
$$+ \sum_{i=n}^{\infty} p_i(z_{i-k_1} + 2\bar{M})c^{\frac{i-n-k_1}{m}}. \tag{3.6.16}$$

为证结论成立, 我们证明方程(3.6.16)有正解 $\{z_n\}$ 它满足 $|z_n| \leqslant \frac{\alpha}{2}M$, 这类似引理 3.6.2 的证明, 省略, 证毕.

定理 3.6.1　引理 3.6.2 的条件成立, 则方程(3.6.1)当 $c=1$ 时有一个有界最终正解和一个有界振动解 $\{x_n\}$ 满足

$$x_n = \omega_n + R_n.$$

其中 $|R_n| \leqslant \varepsilon M$.

证明　设 $\{\bar{u}_n\}$ 和 $\{u_n\}$ 是由引理 3.6.2 定义的解. 令

$$U_n = 2\bar{M} + u_n,$$
$$\bar{U}_n = 2\bar{M} + \omega_n + \bar{u}_n.$$

易证 $\{\bar{U}_n\}$ 和 $\{U_n\}$ 是方程(3.6.1)当 $c=1$ 时的解, 由线性性可知 $x_n = \bar{U}_n - U_n$ 是满足定理条件的振动解, 证毕.

定理 3.6.2　设(3.6.6)式成立, 若方程

$$\Delta(x_n - x_{n-m}) + p_n x_{n-k_1} - q_n x_{n-k_2} = 0, \quad n = 0,1,2,\cdots \tag{3.6.17}$$

有一个有界最终正解,则(3.6.5)成立.

证明 设$\{x_n\}$是(3.6.17)的有界正解,则有 N 及$H>0$ 存在使得当 $n\geq N$ 时 $0<x_n<H$. 令

$$y_n = x_n - x_{n-m} - \sum_{i=n-k_1+k_2}^{n-1} q_i x_{i-k_2},$$

那么

$$\Delta y_n = -p_n x_{n-k_1} \leqslant 0, n \geqslant N. \tag{3.6.18}$$

我们将证明 $y_n>0$ 最终成立. 否则, $y_n<0$ 最终成立. 于是有 $\beta>0$ 及 $N_1\geq N$ 使得$n\geq N_1$ 时 $y_n\leqslant -\beta$. 因此

$$x_n \leqslant -\beta + x_{n-m} + \sum_{i=n-k_1+k_2}^{n-1} q_i x_{i-k_2},\ n \geqslant N_1.$$

由归纳可证

$$x_{N_1+km} \leqslant -k\beta + x_{N_1} + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=N_1+im-k_1+k_2}^{N_1+im-1} q_j x_{j-k_2}$$

$$\leqslant -k\beta + x_{N_1} + rH \sum_{i=N_1-k_1}^{\infty} q_i,$$

其中, $r=\left[\dfrac{k_1-k_2}{m}\right]+2, k=1,2,\cdots$. 对充分大的 k, 由上式可知, $x_{N_1+km}<0$. 这与$\{x_n\}$是最终正解相矛盾,因此有 $y_n>0$ 最终成立. 即最终有

$$x_n > x_{n-m} + \sum_{i=n-k_1+k_2}^{n-1} q_i x_{i-k_2} > x_{n-m}.$$

那么有 $J>0$ 及 $N_2\geq N_1$ 存在使得 $n\geq N_2$ 时 $x_n\geq J$. 由(3.6.18)知

$$\Delta y_n \leqslant Jp_n, n \geqslant N_3 = N_2 + k_1.$$

对上式求知,我们有

$$y_n \geqslant J\sum_{i=n}^{\infty} p_i, \quad n \geqslant N_3.$$

于是

$$x_n \geqslant x_{n-m} + \sum_{i=n-k_1+k_2}^{n-1} q_i x_{i-k_2} + J\sum_{i=n}^{\infty} p_i$$

$$\geqslant x_{n-m} + J\sum_{i=n}^{\infty} p_i, \quad n \geqslant N_3.$$

所以

$$H \geqslant x_{N_3+km} \geqslant x_{N_3} + J\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=N_3+im}^{\infty} p_j,$$

其中 $k=1,2,\cdots$，让 $k\to\infty$ 我们有

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=N_3+im}^{\infty} p_j < \infty.$$

由引理 3.6.1 知结论成立. 证毕.

由引理 3.6.1 和定理 3.6.2 可得如下结果:

推论 3.6.1 若(3.6.6)式成立，则方程(3.6.17)有有界最终正解的充要条件是(3.6.5)式成立.

推论 3.6.2 方程

$$\Delta(x_n - x_{n-m}) + p_n x_{n-k_1} = 0, \quad n = 0,1,2,\cdots \tag{3.6.19}$$

有有界最终正解的充要条件是

$$\sum_{i=N}^{\infty} i p_i < \infty.$$

在给出定理 3.6.3 前，先建立几个定义.

定义 3.6.1 设 $\{x_n\}_{n=N}^{\infty}$ 是方程(3.6.17)的一个正解，如果它能表达成

$$x_n = \alpha n + \beta_n, \tag{3.6.20}$$

称其为(3.6.17)的 A－型解，其中 $\alpha>0$，$\{\beta_n\}$ 有界.

定义 3.6.2 设 $\{x_n\}_{n=N}^{\infty}$ 是方程(3.6.17)的一个正解，如果它能表达成

$$x_n = n\alpha + \theta_n. \tag{3.6.21}$$

称其为(3.6.17)的 B－型解,其中 $\alpha>0$, $|\theta_n|$ 无界且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\theta_n}{n}=0$.

定理 3.6.3　假设

$$\sum_{i=N}^{\infty} i^2 p_i < \infty, \tag{3.6.22}$$

$$\sum_{i=N}^{\infty} i q_i < \infty, \tag{3.6.23}$$

则方程(3.6.17)必存在 A－型解.

证明　选择 N 足够大使得

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=N-im}^{\infty} p_j(j+1) + r\sum_{i=N-k_1}^{\infty} q_i(i+1) < 1,$$

其中 $r=\left[\frac{k_1-k_2}{m}\right]+2$. 令

$$H_n = \begin{cases} \sum\limits_{i=n}^{\infty} p_i(i+1) + \sum\limits_{i=n-k_1+k_2}^{\infty} q_i(i+1), & n \geqslant N, \\ (n-N+m)\dfrac{H_N}{m}, & N-m \leqslant n < N, \\ 0, & n < N-m. \end{cases}$$

显然 $H_n \geqslant 0$. 定义

$$y_n = \sum_{i=0}^{\infty} H_{n-im}, \quad n \geqslant N,$$

则有

$$y_n - y_{n-m} = H_n, \quad 0 < y_n \leqslant 1, n \geqslant N.$$

设 X 是所有有界数列 $\{x_n\}_{n=N}^{\infty}$ 构成的 Banach 空间,记

$$\Omega = \{x \in X \mid 0 \leqslant x_n \leqslant y_n, n \geqslant N\},$$

在 Ω 上定义一个算子

$$(Tx)_n = \begin{cases} x_{n-m} + \sum\limits_{i=n-k_1+k_2}^{n-1} q_i(x_{i-k_1} + i - k_2) \\ \qquad + \sum\limits_{i=n}^{\infty} p_i(x_{i-k_1} + i - k_1), n \geqslant N + L, \\ \dfrac{n y_n (Tx)_{N+L}}{(N+L) y_{N+L}} + y_n\left(1 - \dfrac{n}{N+L}\right), N \leqslant n \leqslant N + L, \end{cases}$$

其中 $L = \max\{k_1, k_2\}$.

显然 $T\Omega \subseteq \Omega$. 构造序列 $\{x_k^{(l)}\}_{k=0}^{\infty}$:

$$x_n^{(0)} = y_n, \quad n \geqslant N,$$
$$w_n^{(l)} = (Tx^{(l-1)})_n, \quad n \geqslant N, l = 1,2,\cdots,$$

由归纳可知

$$0 < x_n^{(l)} \leqslant x_n^{(l-1)} \leqslant y_n, n \geqslant N, l \geqslant 1.$$

于是有 $\{u_n\} \subset \Omega$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{(l)} = u_n, n \geqslant N, u$ 满足 $Tu = u, n \geqslant N, u_n > 0$. 令 $x_n = n + u_n$, 则 $\{x_n\}_{n=N}^{\infty}$ 是(3.6.17)的一个 $A-$型解, 证毕.

类似定理 3.6.2 证明, 有如下结果:

定理 3.6.4 设(3.6.23)式成立, 且方程(3.6.17)有 $A-$型解, 则(3.6.22)式成立.

推论 3.6.3 假设(3.6.23)成立, 则方程(3.6.17)有 $A-$型解的充要条件是(3.6.22)成立.

推论 3.6.4 方程(3.6.19)存在 $A-$型解的充要条件是

$$\sum_{i=N}^{\infty} i^2 p_i < \infty.$$

定理 3.6.5 假设(3.6.5)和(3.6.23)成立, 并且

$$\sum_{i=N}^{\infty} i^2 p_i = \infty, \tag{3.6.24}$$

则方程(3.6.17)有 $B-$型解.

证明 选择 N 足够大, 使得

$$\sum_{i=N}^{\infty} p_i(i-k_1) + \sum_{i=N-k_1}^{\infty} q_i(i-k_2) \leqslant \frac{1}{4}.$$

令

$$H_n = \begin{cases} 2\sum_{i=n-k_1+k_2}^{n-1} q_i(i-k_2) + 2\sum_{i=n}^{\infty} p_i(i-k_1), & n \geqslant N, \\ (n-N+m)\dfrac{H_N}{m}, & N-m \leqslant n < N, \\ 0, & n < N-m. \end{cases}$$

定义

$$y_n = \sum_{i=0}^{\infty} H_{n-im} \quad n \geqslant N.$$

显然

$$H_n > 0,\ y_n - y_{n-m} = H_n,\ 0 < y_n < n,\ n \geqslant N,$$

且有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n}{n}=0$. 设

$$\Omega = \{x \in X \mid 0 \leqslant x_n \leqslant y_n, n \geqslant N\}.$$

在 Ω 上定义算子

$$(Tx)_n = \begin{cases} x_{n-m} + \sum_{i=n-k_1+k_2}^{n-1} q_i(x_{i-k_1} + i - k_2) \\ \qquad + \sum_{i=n}^{\infty} p_i(x_{i-k_1} + i - k_1), n \geqslant N + l, \\ \dfrac{ny_n(Tx)_{N+l}}{(N+l)y_{N+l}} + y_n\left(1 - \dfrac{n}{N+l}\right), & N \leqslant n \leqslant N+l, \end{cases}$$

其中 $l=\max\{k_1,k_2\}$. 易知 T 有不动点, $\{u_n\}_{n=N}^{\infty}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{n}=0$. 注意到方程满足(3.6.24)式, 可知 $x_n = n + u_n$ 是(2.6.17)的 B-型解, 证毕.

对于方程

$$\Delta(x_n - x_{n-m}) = p_n x_{n-k_1} - q_n x_{n-k_2}, \quad n = 0,1,\cdots, \tag{3.6.25}$$

利用类似的方法可建立如下定理:

定理 3.6.6 假设(3.6.5)和(3.6.6)成立,则方程(3.6.25)存在一个有界最终正解,且对于正 m 周期数列$\{w_n\}$有有界振动解

$$x_n = w_n + R_n,$$

其中$|R_n| < \alpha M, \alpha \in (0,1), M = \min\limits_{n \geqslant N}\{\max w_n, \max(-w_n)\}$.

定理 3.6.7 假设(3.6.6)成立,方程(3.6.25)具有满足条件$\liminf\limits_{n\to\infty} x_n > 0$的有界正解,则(3.6.5)式成立.

定理 3.6.8 假设(3.6.22)和(3.6.23)成立,则方程(3.6.25)有 A-型解.

定理 3.6.9 假设(3.6.5),(3.6.23)和(3.6.24)成立,则方程(3.6.25)有 B-型解.

接下来考虑方程(3.6.1)当 $c \in (0,1)$时的情况.

定理 3.6.10 假设 $c \in (0,1)$,(3.6.6)和(3.6.12)成立,则方程(3.6.1)有有界最终正解和有界振动解$\{x_n\}$,

$$x_n = c^{\frac{n}{m}}(w_n + R_n),$$

其中 w_n, R_n 如前所述.

利用引理 3.6.4,类似于定理 3.6.1 可证明定理 3.6.10.

推论 3.6.5 设(3.6.6)成立,且有

$$\sum_{i=N}^{\infty} p_i < \infty. \tag{3.6.26}$$

则定理 3.6.10 的结论成立.

证明 我们将证明若(3.6.26)成立,则(3.6.12)成立. 令 $j = \left[\frac{n-N}{m}\right]$,则

$$n - m \leqslant N + jm \leqslant n, N + jm \leqslant n \leqslant N + (j+1)m.$$

记

$$I=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=N+jm}^{\infty}c^{\frac{i-N-jm}{m}}p_i.$$

那么

$$\begin{aligned}
I&\leqslant\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=N+jm}^{N+(j+1)m-1}\sum_{k=N+jm}^{\infty}c^{\frac{i-N-jm}{m}}p_k\\
&\leqslant\frac{1}{cm}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=N+jm}^{N+(j+1)m-1}\sum_{k=i-m}^{\infty}c^{\frac{k-i+jm}{m}}p_k\\
&=\frac{1}{cm}\sum_{i=N}^{\infty}\sum_{k=i-m}^{\infty}c^{\frac{k-i+m}{m}}p_k\\
&=\frac{1}{cm}\sum_{i=N-m}^{\infty}\sum_{k=i}^{\infty}c^{\frac{k-i}{m}}p_k\\
&=\frac{1}{cm}\sum_{i=N-m}^{\infty}p_i\sum_{k=N-m}^{\infty}c^{\frac{i-k}{m}}\\
&\leqslant\frac{1}{cm}\Big(\sum_{i=N-m}^{\infty}p_i\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty}c^{\frac{k}{m}}\Big)\\
&=G\sum_{i=N-m}^{\infty}p_i,
\end{aligned}$$

其中 $G=\frac{1}{cm}\sum_{k=0}^{\infty}c^{\frac{k}{m}}$. 证毕.

类似定理 3.6.10,我们会有如下结果:

定理 3.6.11　假设 $c\in(0,1)$(3.6.6)和(3.6.12)成立,则方程(3.6.1)有有界最终正解和有界振动解 $\{x_n\}:x_n=c^{\frac{k}{m}}(w_n+R_n)$. w_n 和 R_n 如前定义.

类似定理 3.6.10,对 $c>1$ 的情况也有如下结果:

定理 3.6.12　设 $c>1$,(3.6.6)和(3.6.12)成立,则方程(3.6.1)和(3.6.2)有无界最终正解和无界振动解 $\{x_n\}:x_n=c^{\frac{n}{m}}(w_n+R_n)$. w_n

和R_n如前定义.

推论 3.6.6 假设 $c>1$,(3.6.6)成立,且有

$$\sum_{i=N}^{\infty} c^{\frac{i}{m}} p_i < \infty, \tag{3.6.27}$$

则定理 3.6.12 的结论成立.

证明 令 $j=\left[\frac{n-N}{m}\right]$,则

$$n-m \leqslant N+jm \leqslant n,\ N+jm \leqslant n \leqslant N+(j+1)m.$$

记

$$I=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=N+jm}^{\infty} c^{\frac{i-N-jm}{m}} p_i,$$

则

$$\begin{aligned}
I &\leqslant \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=N+jm}^{N+(j+1)m-1}\sum_{k=N+jm}^{\infty} c^{\frac{k-i+m}{m}} p_k \\
&= \frac{1}{m}\sum_{i=N}^{\infty}\sum_{k=i-m}^{\infty} c^{\frac{k-i+m}{m}} p_k \\
&= \frac{1}{m}\sum_{i=N-m}^{\infty}\sum_{k=i}^{\infty} c^{\frac{k-i}{m}} p_k \\
&= \frac{1}{m}\sum_{i=N-m}^{\infty} p_i \sum_{k=N-m}^{i} c^{\frac{i-k}{m}} \\
&= \frac{1}{m}\sum_{i=N-m}^{\infty} p_i \sum_{k=0}^{i-N+m} c^{\frac{k}{m}} \\
&\leqslant \frac{1}{m}\sum_{i=N-m}^{\infty} p_i c^{\frac{i-N+m}{m}} \frac{1}{1-c^{-\frac{1}{m}}} \\
&= \frac{1}{m} c^{-\frac{N-m}{m}} \left(1-c^{-\frac{1}{m}}\right)^{-1} \sum_{i=N-m}^{\infty} p_i c^{\frac{i}{m}} \\
&= G\sum_{i=N-m}^{\infty} p_i c^{\frac{i}{m}},
\end{aligned}$$

其中 $G=\frac{1}{m}c^{-\frac{N-m}{m}}(1-c^{-\frac{1}{m}})^{-1}$. 证毕.

§ 3.7 非振动解的渐近性

本节中将考虑差分方程

$$\Delta(x_n+cx_{n-\tau})+p_nx_{n-\sigma}=0,\ n=0,1,2,\cdots,\qquad(3.7.1)$$

其中 c 是实数, $\tau>0,\sigma\geqslant0$ 是整数, $\{p_n\}$ 是非负实数列, 我们将讨论方程(3.7.1)非振动解的渐近性.

按照 c 的情况分如下几点进行讨论: (1) $c=1$, (2) $c\in(0,1)$, (3) $c\in(1,\infty)$, (4) $c\in(-1,0)$, (5) $c\in(-\infty,-1)$, (6) $c=0$, 和 (7) $c=-1$.

定理 3.7.1 假设 $c=1$, 且有

$$\sum_{n=N}^{\infty}\min\{p_n,p_{n-\tau}\}=\infty,\qquad(3.7.2)$$

则方程(3.7.1)的所有非振动解 $\{x_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

证明 不妨设 $\{x_n\}$ 是(3.7.1)的最终正解. 则有 N_1 使得 $n\geqslant N_1\geqslant N+\mu$ 时 $x_{n-\mu}>0$, 其中 $\mu=\max\{\tau,\sigma\}$. 令

$$y_n=x_n+x_{n-\tau},\quad n\geqslant N_1,$$

那么

$$y_n>0,\quad \Delta y_n=-p_nx_{n-\sigma}\leqslant0,\quad n\geqslant N.$$

由(3.7.1)知

$$\begin{aligned}\Delta y_n+\Delta y_{n-\sigma}&=-p_nx_{n-\sigma}-p_{n-\tau}x_{n-\tau-\sigma}\\&\leqslant-\min\{p_n,p_{n-\tau}\}(x_{n-\sigma}+x_{n-\tau-\sigma})\\&=-\min\{p_n,p_{n-\tau}\}y_{n-\sigma}\leqslant0.\quad n\geqslant N_1.\end{aligned}$$

因此 $y_n+y_{n-\sigma}$ 是正的非增的. 因此有极限 L, 对上式求和, 有

$$L-y_N+y_{N-\tau}+\sum_{n=N}^{\infty}\min\{p_n,p_{n-\tau}\}y_{n-\tau}\leqslant0.$$

由(3.7.2)及 y_n 的单调性可知 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$. 注意到 $0<x_n<y_n$，于是有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$. 证毕.

定理 3.7.2 假设 $c\in(0,1)$，且有

$$\sum_{n=N}^{\infty} p_n = \infty, \tag{3.7.3}$$

则方程(3.7.1)的非振动解 $\{x_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$.

证明 设有 N_1 使得 $n\geqslant N_1\geqslant N+\mu$ 时 $x_{n-\mu}>0$，令

$$y_n = x_n + cx_{n-\tau}. \tag{3.7.4}$$

由(3.7.1)知

$$\Delta y_n = -p_n x_{n-\sigma} \leqslant 0, \quad y_n > 0, \qquad n \geqslant N_1.$$

即 y_n 是正的非增数列. 因此有非负极限 L. 对(3.7.1)求和，则有

$$L - y_{N_1} + \sum_{n=N_1}^{\infty} p_n x_{n-\sigma} = 0. \tag{3.7.5}$$

由(3.7.3)知 $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n=0$. 于是有子列 $\{x_{n_k}\}$ 存在，使得 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=0$. 接下来证明 $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n=0$. 由于

$$y_n - y_{n-\tau} = x_n - (1-c)x_{n-\tau} - cx_{n-2\tau} = 0,$$

因此

$$0 = \lim_{k\to\infty}(y_{n_k} - y_{n_k-\tau}) = \lim_{k\to\infty}(-(1-c)x_{n_k-\tau} - cx_{n_k-2\tau}).$$

注意到 $c\in(0,1)$，于是

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k-\tau} = \lim_{k\to\infty} x_{n_k-2\tau} = 0.$$

但是

$$\lim_{k\to\infty} y_{n_k-\tau} = \lim_{k\to\infty}(x_{n_k-\tau} + cx_{n_k-2\tau}) = 0.$$

这样可知 $L=0$. 注意到 $0<x_n<y_n$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$，证毕.

定理 3.7.3 设 $c>1$，且(3.7.3)式成立. 则定理 3.7.1 的结论成立.

证明 设有 N 使得当 $n\geqslant N\geqslant N+\mu$ 时 $x_{n-\mu}>0$，y_n 由(3.7.4)

式定义,则

$$y_n > 0, \quad \Delta y_n = -p_n x_{n-\sigma} \leqslant 0, \qquad n \geqslant N_1.$$

于是有

$$\lim_{n\to\infty} y_n = L \geqslant \lim_{n\to\infty}\sup p x_{n-\tau},$$

或者

$$\lim_{n\to\infty}\sup x_{n-\tau} \leqslant \frac{L}{c}.$$

对(3.7.1)求和,可得(3.7.5)式.由(3.7.3)知$\lim\limits_{n\to\infty}\inf x_n = 0$.因此有子列$\{x_{n_k-\tau}\}$使得

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k-\tau} = 0.$$

因此

$$\frac{L}{c} \geqslant \lim_{n\to\infty}\sup x_n \geqslant \lim_{k\to\infty}\sup x_{n_k}$$

注意到 $c>1$,则有 $L=0$,得证结论成立.证毕.

定理 3.7.4　设 $c\in(-1,0)$,条件(3.7.3)成立,则方程(3.7.1)的非振动解$\{x_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

证明　类似地有 $\Delta y_n \leqslant 0$ 由(3.7.3)知 Δy_n 不恒为零.于是 $y_n>0$ 或 $y_n<0$ 最终成立.如 $\Delta y_n<0$ 成立,则有 N_1 及 $\alpha>0$ 使得

$$x_{n-\mu} > 0, \quad y_n \leqslant -\alpha < 0, \qquad n \geqslant N_1.$$

即

$$x_n = y_n - cx_{n-\tau} \leqslant -\alpha - cx_{n-\tau} < -\alpha + x_{n-\tau}, \qquad n \geqslant N_1.$$

因此

$$x_{N_1+\tau} \leqslant -\alpha + x_{N_1}$$

并由归纳可知

$$x_{N_1+n\tau} \leqslant -n\alpha + x_{N_1} \qquad n = 2,3,\cdots,$$

当 n 足够大时,显然有 $x_{N_1+n\tau}<0$.这是一个矛盾.因此有 $y_n>0$ 最终

成立. 不妨设 $n \geqslant N_1$ 时 $y_n > 0$, 类似可证 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$. 于是有 $\alpha > 0$ 及 $N_2 \geqslant N_1$ 存在, 使得当 $n \geqslant N_2$ 时 $y_n \leqslant \alpha$, 令

$$M = \max_{N_2 \leqslant n \leqslant N_2+\tau} x_n,$$

则有

$$x_{n-\tau} = y_{n+\tau} - cx_n \leqslant \alpha - cM, \quad N_2 \leqslant n \leqslant N_2 + \tau.$$

归纳可证

$$\begin{aligned} x_{n+2\tau} &\leqslant \alpha - cx_{n+\tau} \leqslant \alpha - c(\alpha - cM) \\ &= (1-c)\alpha + c^2 M, \quad N_2 + \tau \leqslant n \leqslant N_2 + 2\tau, \\ x_{n+k\tau} &\leqslant \alpha(1 - c + c^2 - c^3 + \cdots + (-1)^{k-1}c^{k-1}) + (-1)^k c^k M \\ &\leqslant \frac{\alpha}{1+c} + (-1)^k c^k M, \quad N_2 + (k-1)\tau \leqslant n \leqslant N_2 + k\tau. \end{aligned}$$

由 $c \in (-1, 0)$ 可知 $\{x_n\}$ 有界. 于是可令

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = D.$$

但是

$$\begin{aligned} D &= \limsup_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} (y_n - cx_{n-\tau}) \\ &\leqslant -c \limsup_{n\to\infty} x_n = -cD, \end{aligned}$$

从而 $D = 0$. 证毕.

定理 3.7.5 设 $c < -1$, 条件(3.7.3)成立, 则方程(3.7.1)的非振动解 $\{x_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = \infty$.

证明 设 $\{x_n\}$ 是(3.7.1)的最终正解, y_n 由(3.7.4)式定义. 类似地有 $y_n > 0$ 或 $y_n < 0$ 成立. 如果有 $N_1 \geqslant N + \mu$, 使得 $n \geqslant N_1$ 时 $x_{n-\mu} > 0$, $y_n > 0$, 则有

$$x_n > -cx_{n-\tau}, \qquad n \geqslant N_1.$$

令

$$M = \max_{N_1 \leqslant n \leqslant N_1+\tau} x_n,$$

$$x_{n+k\tau} > -cx_{n+(k-1)\tau} > \cdots > (-c)^k M, \quad N_1 \leqslant n \leqslant N_1 + \tau.$$

由于 $-c>1$，于是有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

如果 $n \geqslant N_1, y_n < 0$. 则有 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = L < 0$. 如果 $L = -\infty, y_n > cx_{n-\tau}$ 可得结论成立. 如果 $-\infty < L < 0$ 那么有(3.7.5). 注意到

$$-\frac{L}{2} \leqslant -y_{n+\tau} = -cx_n - x_{n+\tau} \leqslant -cx_n.$$

由(3.7.3)可知矛盾. 对于最终负解类似可证. 证毕.

定理 3.7.6　设 $c=0$，(3.7.3)成立，则定理 3.7.1 的结论成立.

证明　这时由(3.7.1)知，

$$x_n \leqslant \sum_{i=N}^{\infty} p_n x_{n-\sigma}.$$

再由(3.7.3)及 x_n 的单调性自然有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. 证毕.

定理 3.7.7　设 $c=-1$，(3.7.3)成立，则定理 3.7.1 的结论成立.

这时，(3.7.1)的所有解振动，定理的成立是显然的.

§ 3.8　含非线性中立项的差分方程

考虑含有非线中立项的差分方程

$$\Delta(x_n - px_{n-\tau}^{\alpha}) + q_n x_{n-\sigma}^{\beta} = 0, \qquad n = 0,1,\cdots, \tag{3.8.1}$$

其中，τ 是正整数，σ 是非负整数，$p \in \mathbf{R}$，α 和 β 是正的奇数之比，$\{q_n\}$ 是实数列.

定理 3.8.1　假设 $\alpha \in (0,1)$，$p>0$，$q_n \geqslant 0$，则方程(3.8.1)振动的充要条件是

$$\sum_{i=N}^{\infty} q_i = \infty. \tag{3.8.2}$$

证明　不失一般性，设 $\{x_n\}$ 是(3.8.1)的最终正解. 则有 N，使得 $n>N$ 当 $x_n>0$ 时. 令

$$z_n = x_n - px_{n-\tau}^{\alpha}, \tag{3.8.3}$$

由(3.8.1)知 $\Delta z_n \leqslant 0$ 最终成立. 再由(3.8.2)可知, $z_n < 0$ 或 $z_n > 0$ 最终成立. 如果前者成立, 则有 $N_1 \geqslant N$ 及 $l > 0$ 存在, 使得当 $n \geqslant N_1$ 时 $z_n \leqslant -l$. 由(3.8.3)可知

$$px_{n-\tau}^{\alpha} \geqslant l > 0, \qquad n \geqslant N_1.$$

于是有 $l_1 > 0$ 及 $N_2 \geqslant N_1$ 使得 $n \geqslant N_2$ 时 $x_n \geqslant l_1 > 0$. 从而

$$\Delta z_n + q_n l^{\beta} \leqslant 0, \quad n \geqslant N_2 + \sigma. \tag{3.8.4}$$

对上式求和可知 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = -\infty$, 就有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, 设有子列 $\{x_{n_j}\}$ 使得 $x_{n_j} = \max\limits_{N_2 \leqslant i \leqslant n_j} \{x_i\}$ 且 $\lim\limits_{j->\infty} x_{n_j} = \infty$, 那么,

$$z_{n_j} = x_{n_j} - px_{n_j-\tau}^{\alpha} \geqslant x_{n_j} - px_{n_j}^{\alpha} = x_{n_j}^{\alpha}(x_{n_j}^{1-\alpha} - p).$$

上式右边当 $j \to \infty$ 时发散到 ∞. 这与 $z_n < 0$ 矛盾. 因此有 $z_n > 0$ 最终成立. 不妨设 $n \geqslant N + \mu$ $(\mu = \max\{\tau, \sigma\})$ 时 $z_n > 0$. 于是有

$$\begin{aligned} x_n &= z_n + px_{n-\tau}^{\alpha} \\ &= z_n + p(z_{n-\tau} + pz_{n-2\tau}^{\alpha})^{\alpha} \\ &= \cdots \\ &\geqslant z_n + p(z_{n-\tau} + p(z_{n-2\tau} + p(\cdots + z_{n-l\tau})^{\alpha})^{\alpha}\cdots)^{\alpha}, \\ &\qquad n \geqslant N + l\tau. \end{aligned} \tag{3.8.5}$$

选择 l 足够大使得 $\alpha^l \beta < 1$. 将(3.8.5)代入(3.8.1), 则有

$$\Delta z_n + q_n[z_{n-\sigma} + p(z_{n-\sigma-\tau} + p(z_{n-\sigma-2\tau} + p(\cdots + pz_{n-\sigma-l\tau})^{\alpha})^{\alpha}\cdots)^{\alpha}]^{\beta} \leqslant 0.$$

注意到 $\Delta z_n \leqslant 0$, 于是

$$\Delta z_n + q_n p^{\frac{\beta(1-\alpha^l)}{1-\alpha}} z_n^{\alpha^l \beta} \leqslant 0,$$

即

$$z_n^{-\alpha^l \beta} \Delta z_n + q_n p^{\frac{\beta(1-\alpha^l)}{1-\alpha}} \leqslant 0. \tag{3.8.6}$$

定义 $r(t)=z_m+(t-m)\Delta z_m$, $m\leqslant t\leqslant m+1$. 由 $\Delta z_m\leqslant 0$ 可知 $z_{m+1}\leqslant r(t)\leqslant z_m$ 及

$$\frac{r'(t)}{r^{\alpha^l\beta}(t)}\leqslant\frac{\Delta z_m}{z_m^{\alpha^l\beta}}. \tag{3.8.7}$$

由(3.8.6)和(3.8.7)可知

$$\int_{r_0}^{r(\infty)}\frac{dr}{r^{\alpha^l\beta}}=-\infty. \tag{3.8.8}$$

这与 $\alpha^l\beta<1$ 矛盾.

如果(3.8.2)不成立,我们将证明方程(3.8.1)有一个最终正解.

设 $d>0$ 使其满足 $pd^\alpha<d$,则有 $\varepsilon>0$ 及足够大的 N 存在使得 $d>\varepsilon+pd^\alpha$,

$$\sum_{n=N}^{\infty}q_n\leqslant(d-pd^\alpha-\varepsilon)d^{-\beta}. \tag{3.8.9}$$

定义序列 $\{\omega^{(k)}\}$:

$$\omega_n^{(1)}=\varepsilon,\qquad n\geqslant N-\mu,$$

$$\omega_n^{(k+1)}=\begin{cases}\varepsilon+p(\omega_{n-\tau}^{(k)})^\alpha+\sum\limits_{i=n}^{\infty}q_i(\omega_{n-\sigma}^{(k)})^\beta, & n\geqslant N+1,\\ \omega_N^{(k+1)}, & N-\mu\leqslant n\leqslant N.\end{cases}$$

显然

$$\begin{aligned}\varepsilon\leqslant\omega_n^{(2)}&\leqslant\varepsilon+p\varepsilon^\alpha+\varepsilon^\beta\sum_{i=n}^{\infty}q_i\\&\leqslant\varepsilon+pd^\alpha+d^\beta\sum_{i=n}^{\infty}q_i\leqslant d,\qquad n\geqslant N.\end{aligned}$$

归纳可证

$$\varepsilon=\omega_n^{(1)}\leqslant\omega_n^{(2)}\leqslant\cdots\leqslant\omega_n^{(k)}\leqslant d,\qquad n\geqslant N,\quad k\geqslant 1.$$

于是有 $\varepsilon\leqslant\omega_n\leqslant d$ 使得 $\lim\limits_{k\to\infty}\omega_n^{(k)}=\omega_n$,且满足

$$\omega_n=\varepsilon-p\omega_{n-\tau}^{\alpha}+\sum_{i=n}^{\infty}q_i\omega_{i-\sigma},\qquad n\geqslant N.$$

即$\{\omega_n\}_{n=N}^{\infty}$是方程(3.8.1)的正解,证毕.

注意,若 $\alpha=1, p=1$,由前面知识可知(3.8.2)不是(3.8.1)振动的充要条件.

例 3.8.1 考虑方程

$$\Delta(x_n + x_{n-1}) + \frac{(2n+1)(n-2)^3}{n(n^2-1)} x_{n-2}^3 = 0. \quad (3.8.10)$$

它有非振动解$\left\{\frac{1}{n}\right\}$,但其系数满足(3.8.2)式,因此,(3.8.2)不是(3.8.10)振动的充分条件.

定理 3.8.2 假设 $p\geqslant 0$,且有 $b\in(0,1]$使得

$$p\frac{n^b}{(n-\tau)^{\alpha b}} + n^b \sum_{i=n}^{\infty} \frac{q_i}{(i-\sigma)^{\beta b}} \leqslant 1, \quad (3.8.11)$$

则方程(3.8.1)有一个最终正解$\{x_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

证明 设 l_∞^N是形如$\{y_n\}_{n=N}^{\infty}$的所有有界实数列集,在其上定义$\|y\| = \sup\limits_{n\geqslant N}|y_n|$,则 l_∞^N构成一 Banach 空间,令

$$\Omega = \{y \in l_\infty^N \mid 0 \leqslant yn \leqslant 1, \ n \geqslant N\},$$

在 l_∞^N上定义一个偏序$\leqslant$:$x,y\in l_\infty^N$,$x\leqslant y$ 意指$n\geqslant N$ 时$x_n\leqslant y_n$,则对任意的 $A\subseteq\Omega$,$\inf A$ 和 $\sup A$ 存在且属于 Ω. 定义算子:

$$(Ty)_n = \begin{cases} py_{n-\tau}^{\alpha} \dfrac{n^b}{(n-\tau)^{\alpha b}} + n^b \displaystyle\sum_{i=n}^{\infty} \frac{q_i y_{i-\sigma}^{\beta}}{(i-\sigma)^{\beta b}}, & n \geqslant N_1, \\ \dfrac{n}{N_1}(Ty)N_1 + \left(1 - \dfrac{n}{N_1}\right), & N \leqslant n \leqslant N_1, \end{cases}$$

其中 N_1 足够大使得(3.8.11)成立,由(3.8.11)可知 $T\Omega\subseteq S$,T 显然是增算子. 于是由 Knaster 不动点定理可知有 $y\in S$ 使得

$$y_n = py_{n-\tau}^{\alpha} + \frac{n^b}{(n-\tau)^{\alpha b}} + n^b \sum_{i=n}^{\infty} \frac{q_i y_{i-\sigma}^{\beta}}{(i-\sigma)^{\beta b}}, \quad n \geqslant N_1.$$

且 $n\geqslant N$, $y_n>0$. 令 $x_n = \frac{y_n}{n}$,则由上式可知

$$x_n = px_{n-\tau}^{\alpha} + \sum_{i=n}^{\infty} x_{i-\sigma}^{\beta}, \quad n \geqslant N_1.$$

于是

$$\Delta(x_n - px_{n-\tau}^{\alpha}) + p_n x_{n-\sigma}^{\beta} = 0, \quad n \geqslant N_1.$$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ 显然成立. 证毕.

例 3.8.2 考虑方程

$$\Delta(x_n - x_{n-1}^3) + q_n x_{n-1} = 0, \tag{3.8.12}$$

其中 $q_n = (n^5 - 3n^4 - n^2 + 2n - 1)(n^3(n+1)(n-1)^2)^{-1}, b = 1$ 时 (3.8.11)成立. 因此,(3.8.12)存在一个最终正解 $\{x_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. 事实上, $x_n = \dfrac{1}{n}$ 就是这样的解.

为了得到定理 3.8.3,先给出一个引理.

引理 3.8.1 设 $q>0$ 且

$$y_n + qy_{n-\tau}^{\alpha} \geqslant \beta_n > 0, \quad n \geqslant n_0,$$

则对任意的 $n^* \geqslant n_0 + \tau$ 有

$$A = \{n \mid n^* \leqslant n \leqslant n^* + 2\tau - 1, y_{n-\tau} \geqslant \beta_n^*\}.$$

使得 $m(A) \geqslant \tau$,其中 $\beta_n^* = \min\left\{\dfrac{\beta_{n-\tau}}{2}, \left(\dfrac{\beta_n}{2q}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right\}$, $m(A)$ 是 A 中点的个数, $0 \leqslant m(A) \leqslant 2\tau$ 是显然的.

证明 对于 $n^* \geqslant n_0 + \tau$,定义

$$B = \left\{n \,\middle|\, n^* \leqslant n \leqslant n^* + 2\tau - 1, y_{n\tau} \geqslant \frac{\beta_n}{2}\right\}.$$

如果 $B = \varnothing$,则 $n^* \leqslant n \leqslant n^* + \tau - 1$ 时, $qy_{n-\tau}^{\alpha} \geqslant \dfrac{\beta_n}{2}$. 这时自然有 $m(A) \geqslant \tau$;如果 $B \neq \varnothing$ 且 $m(B) = \overline{m} \geqslant \tau$,那么 $A = B + \tau = \{n \mid n - \tau \in B\}$. 也有 $m(A) \geqslant \tau$. 如果 $l \leqslant \overline{m} < \tau$,易知 $n \in B + \tau . y_{n-\tau} \geqslant \dfrac{\beta_{n-\tau}}{2}$ 这时 $A = \{n \mid n^* \leqslant n \leqslant n^* \leqslant 2\tau - 1\} \setminus B \cup (B + \tau)$,有 $m(A) = \tau$. 证

毕.

定理 3.8.3　假设 $p<0$ 且

$$\sum_{n\in E} q_n = \infty, \tag{3.8.13}$$

对每一无界集 $E\subset N$ 成立,则方程(3.8.1)的解,或者振动,或者当 $n\to\infty$ 时趋于零.

证明　设 $\{x_n\}$ 是(3.8.1)的最终正解,则 $z_n>0$, $\Delta z_n<0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = l\geqslant 0$ 有限.这时有

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} q_n x_{n-\sigma}^{\beta} < \infty.$$

如果 $l>0$,则 $z_n = x_n - p x_{n-\tau}^{\alpha} \geqslant l$.由引理 3.8.1 知,对于每一 n^* 有 $A=\{n \mid n^*\leqslant n\leqslant n^*+2\tau-1, x_{n-\tau}\geqslant l^*\}$,使得 $m(A)\geqslant\tau$.因此

$$\infty > \sum_{n=n_0}^{\infty} q_n x_{n-\sigma}^{\beta} \geqslant \sum_{n\in E} q_n x_{n-\sigma}^{\beta} \geqslant (l^*)^{\beta} \sum_{n\in E} q_n.$$

这与(3.8.13)矛盾.于是 $l=0$.而 $x_n<z_n$,自然有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.证毕.

例 3.8.3　考虑方程

$$\Delta(x_n + x_{n-2}^3) + 4x_{n-2} = 0, \tag{3.8.14}$$

易证(3.8.14)满足定理 3.8.4 的条件.事实上 $\{(-1)^n\}$ 就是一个满足要求的解.

类似定理 3.8.3,我们也有如下定理.

定理 3.8.4　假设 $p<0$, $q_n\leqslant 0$, $\sum\limits_{n\in E} q_n = -\infty$,则方程(3.8.1)的每一有界解振动.

定理 3.8.4 对无界解不成立.

例 3.8.4　考虑方程

$$\Delta(x_n + 2x_{n-3}) - 3(n-5)^{-\frac{1}{3}} x_{n-5}^{\frac{1}{3}} = 0.$$

它满足定理 3.8.4 的条件,但它有非振动解 $\{n\}$.

§ 3.9 强迫振动

考虑强迫方程

$$\Delta(x_n + px_{n-\tau}^{\alpha}) + q_n x_{n-\sigma}^{\beta} = F_n, \tag{3.9.1}$$

其中，$\{F_n\}$是实数列，其它各种参数满足§3.8中类似条件.

定理 3.9.1 设 $p\geqslant 0, q_n\leqslant 0$ 且有$\{f_n\}$使得

$$\Delta f_n = F_n, \limsup_{n\to+\infty} f_n = \infty, \lim_{n\to-\infty} f_n = -\infty; \tag{3.9.2}$$

则方程(3.9.1)的有界解振动.

证明 设$\{x_n\}$是(3.9.1)的有界最终正解，则有 $z_n = x_n + px_{n-\tau}^{\alpha} > 0$ 最终成立，由(3.9.1)可知 $\Delta(z_n - f_n)\geqslant 0$ 最终成立. 这时自然有 $z_n - f_n\geqslant 0$. 由定理的条件可知$\{z_n\}$无界. 这是一个矛盾. 证毕.

例 3.9.1 考虑差分方程

$$\Delta(x_n + x_{n-2}^3) - (n-2)(2n+1)x_{n-2}^3 = F_n,$$

其中

$$F_n = (-1)^{n+1}[2n + 1 + (n+1)^{-\frac{1}{3}} + (n-1)^{-1} + n^{-\frac{1}{3}} + (n-2)^{-1}].$$

这时 $f_n = (-1)^n[n + n^{-\frac{1}{3}} + (n-2)^{-1}]$满足定理 3.9.1 的条件. 因此，它的有界解振动，事实上$\{(-1)^n n^{-\frac{1}{3}}\}$就是满足题意的解.

类似地，有如下结果：

定理 3.9.2 假设 $p\geqslant 0, q_n\geqslant 0$ 且(3.9.2)成立，则方程(3.9.1)振动.

例 3.9.2 考虑

$$\Delta(x_n + x_{n-2}) + x_{n-1} = (-1)^{n+1}(5n-3). \tag{3.9.3}$$

这时 $f_n = (-1)^n\left(\dfrac{5}{2}n - \dfrac{1}{4}\right)$. 定理 3.9.2 的条件成立. $\{(-1)^n n\}$就

是满足要求的解.

定理3.9.1和定理3.9.2均要求 F_n 无界,而下面结果对 F_n 有界也成立.

定理3.9.3 假设 $p>0,q_n\geqslant 0,\Delta f_n=F_n$ 且

$$f_+(n)=\max\left\{\frac{f_{n-\tau}}{2},\left(\frac{f_n}{2p}\right)^{\frac{1}{\alpha}},0\right\},$$

$$f_-(n)=\min\left\{\frac{f_{n-\tau}}{2},\left(\frac{f_n}{2p}\right)^{\frac{1}{\alpha}},0\right\},$$

满足

$$\sum_{n\in E}q_nf_+^\beta(n)=\sum_{n\in E}q_nf_-^\beta(n)=\infty, \tag{3.9.4}$$

对 $E\subset N$ 使得 $m(E\cap\{s,s+1,\cdots,s+2\tau-1\})\geqslant\tau$ 均成立,则方程(3.9.1)振动.

证明 设 $\{x_n\}$ 是(3.9.1)的最终正解,则有 $\Delta(z_n-f_n)\leqslant 0,z_n\geqslant f_n$ 成立.因此

$$\sum_{n=N}^{\infty}q_nx_{n-\sigma}^\beta<\infty. \tag{3.9.5}$$

另一方面,我们有 $x_n+px_{n-\tau}^\alpha\geqslant\max\{f_n,0\}$ 由引理3.8.1知 $A=\{n\mid n^*\leqslant n\leqslant n^*+2\tau-1,x_{n-\tau}\geqslant f_+(n)\}$ 满足 $m(A)\geqslant\tau$.故

$$\sum_{n=N}^{\infty}q_nx_{n-\sigma}^\beta\geqslant\sum_{n\in E}q_nx_{n-\sigma}^\beta\geqslant\sum_{n\in E}q_nf_+^\beta(n)=\infty.$$

这是一个矛盾.对于最终负解可类似证明.证毕.

例3.9.3 考虑方程

$$\Delta(x_n+x_{n-2}^3)+2x_{n-2}^3=2(-1)^{n+1},$$

它满足定理3.9.3的条件,因此它的所有解振动.$x_n=(-1)^n$ 就是以上方程的振动解.显然,它不满足定理3.9.2的要求.

类似地也有如下结果:

定理3.9.4 假设 $p>0,q_n\leqslant 0,\Delta f_n=F_n$ 使得(3.9.4)成立,则

方程(3.9.1)振动.

应当注意到,满足本节定理的方程(3.9.1)对应的不带强迫项的方程是

$$\Delta(x_n - px_{n-\tau}^{\alpha}) + q_n x_{n-\sigma}^{\beta} = 0.$$

由上节知识以及前面内容容易得到其非振动解的存在性.这时,我们称振动是由强迫项引起的.

§ 3.10　含有最大值的差分方程

考虑方程

$$\Delta(x_n + px_{n-\tau}) + q_n \max_{n-\tau\leqslant s\leqslant n} x_s = 0, \tag{3.10.1}$$

其中 $\tau>0$ 和 $\sigma\geqslant0$ 是整数,$p\in\mathbf{R}$,$\{q_n\}$是实数列.本节中将考虑方程(3.10.1)非振动解的渐近性.

方程(3.10.1)显然不同于方程

$$\Delta(x_n + px_{n-\tau}) + q_n x_{n-\sigma} = 0. \tag{3.10.2}$$

方程(3.10.2)是一个线性方程,若$\{x_n\}$是(3.10.2)的一个解,则$\{-x_n\}$也是它的一个解.因此,我们在讨论(3.10.2)的振动性和非振动解的渐近性时,只要讨论其最终正解即可.但是,方程(3.10.1)当 $\sigma>0$ 时是非线性方程.显然,如果$\{x_n\}$是(3.10.1)的一个最终正解当且仅当$\{-x_n\}$是方程

$$\Delta(x_n + px_{n-\tau}) + q_n \min_{n-\sigma\leqslant s\leqslant n} x_s = 0 \tag{3.10.3}$$

的最终负解.

众所周知,方程(3.10.2)的常数形式为

$$\Delta(x_n + px_{n-\tau}) + qx_{n-\sigma} = 0. \tag{3.10.4}$$

其特征方程是

$$\lambda - 1 + p\lambda^{-\tau}(\lambda - 1) + q\lambda^{-\sigma} = 0. \tag{3.10.5}$$

但是,方程

$$\Delta(x_n + px_{n-\tau}) + q \max_{n-\sigma \leqslant s \leqslant n} x_s = 0 \tag{3.10.6}$$

却无特征方程.

不妨我们也来寻求方程(3.10.6)的形如 $\pm \lambda^{-n}$ 的解. 显然, $\lambda \in (0,1)$ 和 $\lambda > 1$ 必须分别看待. 例如考虑 λ^{-n}, 当 $0 < \lambda < 1$ 时, 代入(3.10.6)有

$$\Gamma(\lambda) \equiv (p\lambda^{\tau} + 1)\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) + q = 0.$$

因为 $\Gamma(0^+) = +\infty, \Gamma(1^-) = q$, 因此 $q < 0$ 时 $\Gamma(\lambda)$ 总有根 $\lambda_* \in (0,1)$. λ_*^{-n} 是(3.10.6)的一个解. 而当 $\lambda > 1$ 时, 代入(3.10.6)有

$$\varphi(\lambda) = (p\lambda^{\tau} + 1)\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) + q\lambda^{\sigma} = 0.$$

$$\varphi(1^+) = q, \lim_{\lambda \to \infty} \varphi(\lambda) = \begin{cases} -\infty, & p > 0, \tau > \sigma, \\ +\infty, & p < 0, \tau > \sigma. \end{cases}$$

所以当 $pq > 0$ 时, $\varphi(\lambda)$ 在 $(1, \infty)$ 总有根 λ^*.

类似于 § 3.7 的证明, 我们会有如下结果.

定理 3.10.1 $p \in (-1,1)$ 或者 $(1, \infty)$, $q_n \geqslant 0$ 且有

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} q_n = \infty. \tag{3.10.7}$$

则方程(3.10.1)的非振动解 $\{x_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$.

定理 3.10.2 设 $p = 1, q_n \geqslant 0$ 且有

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \min\{q_n, q_{n-\tau}\} = \infty, \tag{3.10.8}$$

则方程(3.10.1)的最终正解 $\{x_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$.

定理 3.10.3 设 $p < -1, q_n \geqslant 0$ 且(3.10.7)成立, 则方程(3.10.1)的非振动解 $\{x_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n \to \infty} |x_n| = \infty$.

当时 $p = 0$, 方程(3.10.1)变为

$$\Delta x_n + q_n \max_{n-\sigma \leqslant s \leqslant n} x_s = 0. \tag{3.10.9}$$

如果$\{x_n\}$是方程(3.10.9)的一个最终负解，这时当$q_n \geq 0$时自然有$\Delta x_n \geq 0$最终成立，从而(3.10.9)变为

$$x_{n+1} - x_n + q_n x_n = 0.$$

这样，方程的解可写成$x_n = x_N \prod_{i=N}^{n-1}(1-q_i)$.

定理 3.10.2 对方程(3.10.1)的最终负解不成立.

例 3.10.1　考虑方程

$$\Delta(x_n + x_{n-1}) + q_n \max_{n-2 \leq s \leq n} x_s = 0,$$

其中

$$q_n = \frac{3}{2^{n+1}}\left[\min_{n-2 \leq s \leq n}\left(\varphi_s + \frac{1}{2^n}\right)\right]^{-1}, \varphi_n = \frac{1+(-1)^n}{2}.$$

它满足定理 3.10.2 的条件，所以它的最终正解当n趋于无穷大时趋于零. 但是，它有最终负解$x_n = -\varphi_n - \frac{1}{2^n}$，而$\lim_{n\to\infty} \inf x_n = -1$.

接下来，我们将讨论$q_n \leq 0$的情况，为方便起见，我们将方程式写成：

$$\Delta(x_n + px_{n-\tau}) = q_n \max_{n-\sigma \leq s \leq n} x_s. \tag{3.10.10}$$

定理 3.10.4　$p \in (-1, 0]$，$q_n \geq 0$且(3.10.7)成立. 则方程(3.10.10)的非振动解$\{x_n\}$满足$\lim_{n\to\infty}|x_n| = \infty$，或$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

证明　设$\{x_n\}$是(3.10.10)的最终正解，令

$$z_n = x_n + px_{x-\tau}, \tag{3.10.11}$$

则最终有$\Delta z_n \geq 0$. 于是$z_n > 0$或$z_n < 0$最终成立. 如果$z_n > 0$成立，则有$c > 0$及N，当$n \geq N$时$z_n > c$，这时自然有$x_n > c$. 对(3.10.10)求和并利用(3.10.7)，有$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$，从而$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

如果$z_n < 0$成立，则$\lim_{n\to\infty} z_n = L \leq 0$有限，对(3.10.10)求和并利用(3.10.7)有$\lim_{n\to\infty} \inf x_n = 0$. 注意到$z_n > px_{x-\tau} > -x_{n-\tau}$及$z_n$的单调性可知$L = 0$. 另一方面，由$x_n < -px_{n-\tau} < x_{n-\tau}$可知$\{x_n\}$有界，于是令

$\lim\limits_{n\to\infty}\sup x_n = l \geqslant 0$ 这时候有子列 $\{x_{n_k}\}$ 使得 $\lim\limits_{k\to\infty}\sup x_{n_k} = l$，而

$$z_{n_k} = x_{n_k} + p x_{n_k - \tau},$$

取极限有 $0 \geqslant l + pl = l(l + p)$ ，所以 $l = 0$. 对于最终负解可类似证明，证毕.

定理 3.10.5 设 $p \leqslant -1$, $q_n \geqslant 0$ 且(3.10.7)成立，则方程(3.10.10)的非振动解 $\{x_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n| = \infty$ 或者 $\lim\limits_{n\to\infty}\inf|x_n| = 0$.

证明 设 $\{x_n\}$ 是(3.10.10)的最终正解，类似定理 3.10.4 有 $z_n > 0$ 或 $z_n < 0$. 若 $z_n > 0$，与定理 3.10.4 的证明类似. 如果 $z_n < 0$ 成立，自然也有 $\lim\limits_{n\to\infty}\inf x_n = 0$. 对于最终负解可类似地证明，证毕.

定理 3.10.6 如果有 $-1 < p \leqslant 0$ 或 $p < -1$, $q_n \geqslant 0$ 且(3.10.7)成立，则方程(3.10.10)的有界非振动解 $\{x_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

证明 设 $\{x_n\}$ 是(3.10.10)的最终正解，由定理 3.10.4 的证明可知 $L = 0$. 当 $-1 < p \leqslant 0$，由定理 3.10.4 可知结论成立，如果 $p < -1$，令 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup x_n = l$，这时有子列 $\{x_{n_k}\}$ 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k - \tau} = l$. 而

$$z_{n_k} = x_{n_k} + p x_{n_k - \tau}.$$

取极限有 $0 \leqslant l + pl = l(1 + p)$. 所以 $l = 0$. 对于最终负解类似可证，证毕.

定理 3.10.7 设 $p \leqslant -1$, $q_n \geqslant q > 0$，则方程(3.10.10)的最终正解 $\{x_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ 或者 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

证明 由定理 3.10.5 显知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. 下证 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$，这时由定理 3.10.5 的证明，有 $z_n < 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$. 令 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup x_n = l > 0$，(如果 $\{x_n\}$ 无界，我们取为任一正常数，)这时自然有子列 $\{n_k\}$ 使得 $n_{k+1} - n_k > \sigma$，且 $x_{n_k} > \frac{l}{2}$. 从而当 $n_k \leqslant n \leqslant n_k + \sigma$ 时有 $\max\limits_{n-\sigma \leqslant s \leqslant n} x_s > \frac{l}{2}$. 且

$$\sum_{i=n_k}^{n_k+\sigma} q_i \max_{i-\sigma \leqslant j \leqslant i} x_j \geqslant \frac{lq(\sigma + 1)}{2}.$$

从 n_1 到∞对(3.10.10)求和,有

$$-z_{n_1}=\sum_{i=n_1}^{\infty}q_i\max_{i-\sigma\leqslant j\leqslant i}x_i\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=n_k}^{n_k+\sigma}q_i\max_{i-\sigma\leqslant j\leqslant i}x_j$$

$$\geqslant\sum_{k-1}^{\infty}\frac{lq(\sigma+1)}{2}$$

是一个矛盾,证毕.

注意,定理3.10.7对方程(3,10.10)的最终负解不成立.

例 3.10.2 考虑差分方程

$$\Delta(x_n-4x_{n-2})=q_n\max_{n-1\leqslant s\leqslant n}x_s,$$

其中,

$$q_n=3\left(\frac{2}{3}\right)^n\left\{\min_{n-1\leqslant s\leqslant n}\left[2^s+2^s(-1)^s+\left(\frac{2}{3}\right)^s\right]\right\}^{-1}$$

它满足定理3.10.7的所有条件,但有负解

$$x_n=-2^n-(-2)^n-\left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup x_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\inf x_n=-\infty$.

§3.11 注 记

§3.1中的定理由Cheng和Lin在[41]给出,§3.2中的定理3.2.1和3.2.2由Cheng和Zhang在[46]获得,定理3.2.3可看Zhang和Cheng的[43],有关这方面的工作也可参看[42],[44], [45],[47]-[56].§3.3 中的定理看Lalli和Zhang的[56].§3.4选自Chen和Zhang的[57],与之有关的工作可看[59],§3.5 来源于Chen和Zhang的[38].§3.6 是由Zhang和Wang在[62]中获得,§3.7,§3.9是由Zhang和Zhang在[64]中给出.§3.10也看[64].它引自张和陈的[63].

本章中的方程

$$\Delta(x_n - p_n x_{n-\tau}) + q_n f(x_{n-\sigma}) = 0, n = 0,1,\cdots, \quad (3.11.1)$$

均要求 q_n 为常符号,当$\{q_n\}$振动时考虑(3.11.1)的振动性是有价值的.另外,一般要求 f 具有某种单调性,从而不要求 f 的单调性而获得(3.11.1)的振动结果也是有益的.

问题 3.11.1 $\{q_n\}$振动时,获得(3.11.1)的振动性结果.

问题 3.11.2 不要求 f 具有某种单调性,考虑(3.11.1)的振动性.

问题 3.11.3 考虑方程

$$\Delta(x_n - p_n x_{n-\tau}) + q_n \max_{n-\sigma\leq s\leq n} x_s = 0, n = 0,1,\cdots, \quad (3.11.2)$$

的类似问题.

问题 3.11.4 给出方程(3.11.2)振动解的存在性定理.

问题 3.11.5 给出方程(3.11.1)和(3.11.2)所有解非振动的判定定理.

第四章　二阶差分方程的振动性

§4.1　自伴二阶线性差分方程与 Lagrange 恒等式

二阶线性差分方程

$$\Delta(p_{n-1}\Delta x_{n-1}) + q_n x_n = 0 \tag{4.1.1}$$

称自伴的,其中 p_n 定义在$[a, b+1] \equiv \{a, a+1, \cdots, b+1\}$是正的,$q_n$ 定义在$[a+1, b+1]$. 方程(4.1.1)也可写成

$$p_n x_{n+1} + c_n x_n + p_{n-1} x_{n-1} = 0, \tag{4.1.2}$$

其中

$$c_n = q_n - p_n - p_{n-1}, \quad n \in [a+1, b+1], \tag{4.1.3}$$

当 $n_0 \in [a, b+1]$时,给定初始条件

$$x_{n_0} = A, x_{n_0+1} = B, \tag{4.1.4}$$

显然方程(4.1.2) 在$[a, b+2]$上有唯一解.

$n \in [a, b+1]$时 $p_n > 0$,给定方程 (4.1.2), 通过令

$$q_n = c_n + p_n + p_{n-1} \tag{4.1.5}$$

可以将 (4.1.2) 写成自伴方程 (4.1.1).

例 4.1.1　将方程

$$2^n x_{n+1} + (\sin n - 3 \cdot 2^{n-2}) x_n + 2^{n-1} x_{n-1} = 0$$

写成自伴方程. 这里 $p_n = 2^n, c_n = \sin n - 3 \cdot 2^{n-1}$, 因此,

$$q_n = \sin n - 3 \cdot 2^{n-1} + 2^n + 2^{n-1} = \sin n.$$

那么,它的自伴方程是

$$\Delta(2^{n-1}\Delta x_{n-1}) + \sin n x_n = 0.$$

对于任何方程

$$\alpha_n x_{n+1} + \beta_n x_n + \gamma_n x_{n-1} = 0, \tag{4.1.6}$$

其中 $n \in [a, b+1]$ 时 $\alpha_n > 0$, $n \in [a+1, b+1]$ 时 $\gamma_n > 0$, 我们选择 h_n 乘以方程(4.1.6), 要使 (4.1.6)变成自伴方程,则有

$$\alpha_n h_n = p_n, \qquad \gamma_n h_n = p_{n-1}.$$

这样有 $h_{n+1} = \frac{\alpha_n}{\gamma_n} h_n, n \in [a, b]$. 那么 $h_n = A \prod_{i=a}^{n-1} \frac{\alpha_i}{\gamma_{i+1}}$, 其中 A 是一任意正常数. 于是选择

$$p_n = A\alpha_i \prod_{i=a}^{n-1} \frac{\alpha_i}{\gamma_{i+1}},$$

$$q_n = \beta_n h_n + p_n + p_{n-1},$$

方程 (4.1.6) 即可变成 (4.1.1).

例 4.1.2 将差分方程

$$(n-1) y_{n+1} + \left(\frac{n^2}{\Gamma_{n-1}} - n \right) x_n + x_{n-1} = 0, n \geqslant 2k \tag{4.1.7}$$

写成自伴形式. 事实上,令

$$h_n = \prod_{i=2}^{n-1} (i-1) = (n-2)! = \Gamma_{n-1},$$

则

$$p_n = (n-1)\Gamma_{n-1} = \Gamma_n,$$

$$q_n = \left(\frac{n^2}{\Gamma_{n-1}} - n \right) \Gamma_{n-1} + \Gamma_n + \Gamma_{n-1}$$

$$= n^2 - n\Gamma_{n-1} + (n-1)\Gamma_{n-1} + \Gamma_{n-1} = n^2.$$

则 (4.1.7) 的自伴式为

$$\Delta(\Gamma_{n-1} \Delta x_{n-1}) + n^2 x_n = 0.$$

设 $\{x_n\}_{n=a}^{b+2}$, $\{y_n\}_{n=a}^{b+2}$是(4.1.1)的解,行列式

$$w_n = w[x_n, y_n] = \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_{n+1} & y_{n+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ \Delta x_n & \Delta y_n \end{vmatrix} \tag{4.1.8}$$

称为 x_n 和 y_n 的 Casorati 行列式. 记

$$Lx_n = \Delta(p_{n-1}\Delta x_{n-1}) + q_n x_n. \tag{4.1.9}$$

定理 4.1.1 (Lagrange 恒等式). 如果 x_n, y_n 定义在 $[a, b+2]$ 上, 则

$$y_n Lx_n - x_n Ly_n = \Delta(p_{n-1}w_{n-1}), \quad n \in [a+1, b+1].$$

证明 对于 $n \in [a+1, b+1]$, 有

$$\begin{aligned} y_n Lx_n &= y_n\Delta(p_{n-1}\Delta x_{n-1}) + y_n q_n x_n \\ &= \Delta(y_{n-1}p_{n-1}\Delta x_{n-1}) - \Delta y_{n-1}p_{n-1}\Delta x_{n-1} + y_n q_n x_n \\ &= \Delta(y_{n-1}p_{n-1}\Delta x_{n-1} - x_{n-1}p_{n-1}\Delta y_{n-1}) \\ &\quad + x_n\Delta(p_{n-1}\Delta y_{n-1}) + x_n q_n y_n \\ &= \Delta(p_{n-1}w_{n-1}) + x_n Ly_n. \end{aligned}$$

证毕.

对 Lagrange 恒等式两边从 $a+1$ 到 $b+1$ 求和, 有如下结果.

推论 4.1.1 (Green 定理) x_n, y_n 定义在 $[a, b+2]$ 上, 则

$$\sum_{i=a+1}^{b+1} y_i Lx_i - \sum_{i=a+1}^{b+1} x_i Ly_i = p_{b+1}w_{b+1} - p_a w_a.$$

推论 4.1.2 (Liouville 公式) 设 x_n, y_n 是方程(4.1.1)的解, 则

$$w_n = \frac{c}{p_n},$$

其中 $n \in [a, b+1]$, c 是常数.

证明 由 Lagrange 恒等式有

$$\Delta(p_{n-1}w_{n-1}) = 0, \quad n \in [a+1, b+1].$$

因此, 对 $n \in [a+1, b+2]$, $p_{n-1}w_{n-1} = c$ 成立. 即有 $w_n = \dfrac{c}{p_n}$, $n \in [a, b+1]$. 证毕.

§4.2　自伴方程的 Sturm 理论

设 x_n 是方程(4.1.1)的一个非退化解，且 $a<n_0<b+2$ 时 $x_{n_0}=0$. 由(4.1.2)可知

$$p_{n_0}x_{n_0+1}=-p_{n_0-1}x_{n_0-1}.$$

由 x_n 的非退化性可知 $x_{n_0+1}\neq 0$, $x_{n_0-1}\neq 0$ 而 $p_n>0$. 于是有如下结果.

引理 4.2.1　设 x_n 是方程(4.1.1)的非退化解，如果 $a<n_0<b+2$ 时有 $x_{n_0}=0$，则 $x_{n_0-1}x_{n_0+1}<0$.

引理 4.2.1 是 Sturm 理论的基础，在应用引理 4.2.1 之前，我们先给出广义零点的概念.

定义 4.2.1　对方程 (4.1.1)的一个解 x_n，如果当 $n_0=a$ 时有 $x_{n_0}=0$，当 $n_0>a$ 时有 $x_{n_0}=0$ 或者 $x_{n_0-1}x_{n_0}<0$，这时称 x_n 有广义零点.

定理 4.2.1　(Sturm 分离定理) 方程(4.1.1)的两个线性无关解不会有相同的零点. 如果(4.1.1)的非退化解在 n_0 为零，而 $n_1>n_0$ 是它的广义零点，则它的另一线性无关解在$[n_0,n_1]$有广义零点；如果(4.1.1)的非退化解在 n_0 有广义零点，在 $n_1>n_0$ 有广义零点，则另一非退化解在$[n_0,n_1]$有广义零点.

证明　如果(4.1.1) 的两个解 x_n 和 y_n 在 n_0 点同时为零，则 $w_{n_0}=0$，从而 x_n 和 y_n 线性相关.

设 x_n 是 (4.1.1)的非退化解，n_1 是它的零点，$n_2>n_1$ 是它的广义零点，不失一般性，可设 $n_2>n_1+1$，且 $n\in(n_1,n_2)$时 $x_n>0$，这样就有 $x_{n_2}\leqslant 0$. 设 y_n 是(4.1.1)的与 x_n 线性无关的解，且 $n\in[n_1,n_2]$无广义零点. 不妨设 $n\in[n_1,n_2]$时 $y_n>0$，则有 $n_0\in(n_1,n_2)$. 选

择 $T>0$ 使得 $y_{n_0}=Tx_{n_0}$，而 $n\in[n_1,n_2]$ 有 $y_n\geqslant Tx_n$，那么 $u_n=y_n-Tx_n$ 是(4.1.1)的一个非退化解且 $u_{n_0}=0$，$u_{n_0-1}u_{n_0+1}\geqslant 0$. 这与引理4.2.1 矛盾. 类似地，也可证明最后一条的成立性. 证毕.

Sturm 分离定理并不是对所有的二阶方程成立.

例 4.2.1 考虑方程

$$x_{n+1}-x_n-x_{n-1}=0.$$

它的特征方程是 $\lambda^2-\lambda-1=0$，因此有特征根 $\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$，则 $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n$ 和 $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n$ 是它的解. 但是 $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n$ 对每一正整数都是广义零点，而 $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n>0$.

由定理 4.2.1 显知如下结果：

推论 4.2.1 方程 (4.2.1)或者振动或者非振动.

§4.3 Riccati 方程

如果方程(4.1.1)的每一非退化解在 $[a,b+2]$ 上有不多于一个的广义零点，我们称差分方程在 $[a,b+2]$ 上是不共轭的，或称(4.1.1)具有不共轭性.

定理 4.3.1 差分方程 $Lx_n=0$ 在 $[a,b+2]$(或 $[a,\infty)$)上有一个正解，当且仅当 Riccati 方程

$$Ry_n\equiv\Delta y_n+q_n+\frac{y_n^2}{y_n+p_{n-1}}=0 \tag{4.3.1}$$

在 $[a+1,b+2]$(或 $[a+1,\infty)$)有解 y_n 使得

$$y_n+p_{n-1}>0\quad n\in[a+1,b+2](\text{或}[a+1,\infty)).$$

证明 我们只对有限区间给出证明. 设 $Lx_n=0$ 在 $[a,b+2]$ 上有正解 x_n. 作 Riccati 变换

$$y_n = \frac{p_{n-1}\Delta x_{n-1}}{x_{n-1}} = p_{n-1}\left(\frac{x_n}{x_{n-1}} - 1\right), \quad n \in [a+1, b+2],$$

那么

$$y_n + p_{n-1} = p_{n-1}\frac{x_n}{x_{n-1}} > 0, \quad n \in [a+1, b+2].$$

为了证明 y_n 满足 Riccati 方程(4.3.1)，考虑

$$\begin{aligned}
\Delta y_n &= \frac{1}{x_n}\Delta(p_{n-1}\Delta x_{n-1}) + p_{n-1}\Delta x_{n-1}\Delta\frac{1}{x_{n-1}} \\
&= -q_n + y_n x_{n-1}\left(\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n-1}}\right) \\
&= -q_n + y_n\left(\frac{x_{n-1}}{x_n} - 1\right) \\
&= -q_n + y_n\left(\frac{p_{n-1}}{y_n + p_{n-1}} - 1\right) \\
&= -q_n - \frac{y_n^2}{y_n + p_{n-1}}, \quad n \in [a+1, b+2].
\end{aligned}$$

相反，设 y_n 是(4.3.1)在$[a+1, b+2]$上的解且满足 $y_n + p_{n-1} > 0$. 考虑初值问题

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{y_n + p_{n-1}}{p_{n-1}} x_{n-1}, \\ x_a = 1, \end{cases} \tag{4.3.2}$$

可知 $n \in [a, b+2]$时 $x_n > 0$ 且有 $\Delta x_{n-1} = \frac{y_n x_{n-1}}{p_{n-1}}$. 因此，$p_{n-1}\Delta x_{n-1} = y_n x_{n-1}$且

$$\begin{aligned}
\Delta(p_{n-1}\Delta x_{n-1}) &= x_n \Delta y_n + y_n \Delta x_{n-1} \\
&= -q_n x_n - \frac{y_n^2 x_n}{y_n + p_{n-1}} + \frac{y_n^2 x_{n-1}}{p_{n-1}} \\
&= -q_n x_n.
\end{aligned}$$

即 x_n 是$Lx_n = 0$ 的正解. 证毕.

定理 4.3.2 方程 $Lx_n=0$ 在 $[a,b+2]$(或 $[a,\infty)$)上是非共轭的当且仅当 Riccati 不等式 $Ry_n\leqslant 0$ 在 $[a+1,b+2]$(或 $[a+1,\infty)$)上有解 y_n 使得 $y_n+p_{n-1}>0$ 在 $[a+1,b+2]$(或 $[a+1,\infty)$)上成立.

证明 设 $Lx_n=0$ 在 $[a,b+2]$ 是非共轭的, u_n 和 v_n 是 $Lx_n=0$ 满足条件 $u_a=0,u_{a+1}=1$ 和 $v_{b+1}=1,v_{b+2}=0$ 的解. 由非共轭性可知 $n\in[a+1,b+2]$ 时 $u_n>0$, $n\in[a,b+1]$ 时 $v_n>0$. 这就证得 $x_n=u_n+v_n$ 是 $Lx_n=0$ 的正解. 这时自然有(4.3.1)成立.

相反, 设 Riccati 不等式 $Ry_n\leqslant 0$ 在 $[a+1,b+2]$ 上有解 y_n 满足 $y_n+p_{n-1}>0$. 设 z_n 是初值问题 $Rz_n=0,z_{a+1}=y_{a+1}$ 的解, 假设 $n\in[a+1,b+1]$ 时 $z_n\geqslant y_n$. 这时

$$0\geqslant Ry_n=\Delta y_n+\frac{y_n^2}{y_n+p_{n-1}}+q_n.$$

因此

$$y_{n+1}\leqslant\frac{p_{n-1}y_n}{y_n+p_{n-1}}-q_n.$$

由 $f(x)=\dfrac{cx}{x+c}(c>0)$ 的单调性可知

$$y_{n+1}\leqslant\frac{p_{n-1}z_n}{z_n+p_{n-1}}-q_n=z_{n+1}.$$

这说明 $n\in[a+1,b+2]$ 时 $y_n\leqslant z_n$. 证毕.

推论 4.3.1 如果 $q_n\leqslant 0$ 在 $[a+1,b+1]$(或 $[a+1,\infty)$ 成立, 则 $Lx_n=0$ 在 $[a,b+2]$(或 $[a,\infty)$)上是非共轭的. 即方程(4.1.1)非振动.

定理 4.3.3 如果 p_n 在 $[a,\infty)$ 有上界且非振动, 则或者 $\sum\limits_{t=a+1}^{\infty}q_t$ 收敛或者 $\sum\limits_{t=a+1}^{\infty}q_t=-\infty$.

证明 设 $n\geqslant a$ 时 $x_n>0$ 是方程 $Lx_n=0$ 的解, 作 Riccati 变换

$$y_n = \frac{p_{n-1}\Delta x_{n-1}}{x_{n-1}}, \quad n \geqslant a+1.$$

由定理 4.3.1 可知 $y_n + p_{n-1} > 0$ 且 y_n 满足 (4.3.1). 对(4.3.1)求和，则有

$$y_{n+1} = y_{a+1} - \sum_{s=a+1}^{n} q_s - \sum_{s=a+1}^{n} \frac{y_s^2}{y_s + p_{s-1}}. \tag{4.3.3}$$

如果 $\sum_{s=a+1}^{\infty} < \infty$，令 $p_n \leqslant m$，则有

$$0 < \frac{y_n^2}{y_n + m} \leqslant \frac{y_n^2}{y_n + pn - 1}.$$

于是有 $\sum_{s=a+1}^{\infty} \frac{y_s^2}{y_s + p_{s-1}} < \infty$，则 $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$. 这说明 $\sum_{s=a+1}^{\infty} q_s$ 收敛. 如果，$\sum_{s=a+1}^{\infty} \frac{y_s^2}{y_s + p_{s-1}} = \infty$，因 $-y_{n+1} \leqslant p_n \leqslant m$，这样就有 $\sum_{s=a+1}^{\infty} q_s = -\infty$. 证毕.

由定理 4.3.3 显然有如下结果.

推论 4.3.2 如果 p_n 有上界且 $\sum_{s=a+1}^{\infty} q_s = \infty$，则 $Lx_n = 0$ 振动.

推论 4.3.3 如果 p_n 有上界且

$$-\infty \leqslant \liminf_{n\to\infty} \sum_{s=a+1}^{n} q_s < \limsup_{n\to\infty} \sum_{s=a+1}^{n} q_s \leqslant \infty.$$

则方程(4.1.1)振动.

定理 4.3.4 如果

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{s=n_0}^{n} q_s \geqslant 1, \tag{4.3.4}$$

则方程

$$\Delta^2 x_{n-1} + q_n x_n = 0 \tag{4.3.5}$$

振动.

证明 设 (4.3.5)有最终正解 $\{x_n\}$，作 Riccati 变换

$$y_n = \frac{\Delta x_{n-1}}{x_{n-1}}.$$

这时有 $y_n + p_{n-1} = y_n + 1 > 0$ 且

$$\Delta y_n = -q_n - \frac{y_n^2}{y_n + 1}. \tag{4.3.6}$$

对充分大的 N，从 N 到 n 对(4.3.6)式求和，则有

$$y_{n+1} = \frac{y_N}{1 + y_N} - \sum_{s=N}^{n} q_s - \sum_{s=N+1}^{n} \frac{y_s^2}{y_s + 1}. \tag{4.3.7}$$

如果

$$\sum_{s=N+1}^{\infty} \frac{y_s^2}{y_s + 1} = \infty,$$

这与(4.3.7)矛盾.设

$$\sum_{s=N+1}^{\infty} \frac{y_s^2}{y_s + 1} < \infty,$$

这时有 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$，且有

$$0 \geqslant -\frac{y_N}{1 + y_N} + \limsup_{n\to\infty} \sum_{s=N+1}^{n} q_s > 0.$$

这也是一个矛盾.证毕.

例 4.3.1　在方程 (4.3.5)中，选择

$$\{q_n\}_{n=a+1}^{\infty} = \left\{1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \cdots, \right\},$$

则(4.3.5)振动.因为这时有 $N \geqslant a + 1$ 使得 $\limsup\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{s=N}^{n} q_s = 1$.

§4.4　线性二阶方程的振动性

这里将考虑差分方程

$$\Delta^2 x_{k-1} + b_k x_k = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, \tag{4.4.1}$$

其中$\{b_k\}$是非负实数列且有正子列.先给出几个引理.

引理 4.4.1 如果$\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$是(4.4.1)的最终正解，则$\Delta x_k>0$最终成立.

证明 设存在$M_1>0$使得$k\geqslant M_1$时$x_k>0$，则有$\Delta^2 x_{k-1}=-b_k x_k\leqslant 0$对所有$k\geqslant M$成立且不恒为零.于是$\Delta x_k>0$或$\Delta x_k<0$最终成立.如果命题不成立，则$\Delta x_k<0$最终成立.于是有$\alpha>0$及$M_2>M_1$使得$k\geqslant M_2$时$\Delta x_k\leqslant -\alpha$成立.求和可知$\lim\limits_{k\to\infty}x_k=-\infty$.这是一个矛盾.证毕.

给定两个固定的实数a和b，那么由条件

$$u_0+au_1=0,\quad u_{n+1}+bu_n=0 \tag{4.4.2}$$

确定的(4.4.1)在$[0,n+1]$上的非退化解$u=(u_0,u_1,u_2,\cdots,u_{n+1})$称为(4.4.1)的相容解.令

$$J[u]\equiv(1+a)u_1^2+\sum_{k=1}^{n-1}(\Delta u_k)^2+(1+b)u_n^2-\sum_{k=1}^{n}q_k u_k^2.$$

这时有$J[u]=0$.确实，用u_k乘(4.4.1)的两边并重新整理，有

$$-\Delta(u_{k-1}\Delta u_{k-1})+(\Delta u_{k-1})^2-q_k u_k^2=0.$$

从$k=1$到$k=n$对上式求和并利用条件(4.4.2)即知$J[u]=0$.

引理 4.4.2 假设$u=(u_0,u_1,u_2,\cdots,u_{n+1})$是方程(4.4.1)的相容解，$k\in[1,n]$时$u_k>0$.那么，对任何相容量$y=(y_0,y_1,y_2,\cdots,y_{n+1})$有$J[y]\geqslant 0$.$J[y]=0$的充要条件是$y$和$u$线性相关.

证明 由于

$$\begin{aligned}&\Delta u_k\Delta\left(\frac{y_k^2}{u_k}\right)+\left(\frac{y_k^2}{u_k}\right)\Delta u_{k-1}\\&=\Delta(y_k^2)-\Delta\left(\frac{u_{k-1}y_k^2}{u_k}\right)\\&=\Delta(y_k^2)-u_k u_{k+1}\left[\Delta\left(\frac{u_{k-1}y_k^2}{u_k}\right)\right]^2-q_k y_k^2\end{aligned}$$

从 1 到 $n-1$ 对上式求和，则有

$$\sum_{k=1}^{n-1}\{\Delta(y_k^2)-u_k u_{k+1}[\Delta\left(\frac{u_{k-1}y_k^2}{u_k}\right)]^2-q_k y_k^2\}$$

$$=y_n^2-y_1^2-\frac{u_{n-1}y_n^2}{u_n}+\frac{u_0 y_1^2}{u_1}$$

$$=\left(\frac{y_n^2}{u_n}\right)(u_n-u_{n-1}-u_{n+1}+u_n+u_{n+1}-u_n)-y_1^2+\frac{u_0 y_1^2}{u_1}$$

$$=q_n y_n^2+y_n^2\left(\frac{u_{n+1}}{u_n-1}\right)+y_1^2\left(\frac{u_0}{u_1-1}\right). \tag{4.4.3}$$

将 $u_0=-au_1, u_{n+1}=-bu_n$ 代入上式，则有

$$J[y]=\sum_{k=1}^{n-1}u_k u_{k+1}\left[\Delta\left(\frac{y_k}{u_k}\right)\right]^2\geqslant 0.$$

如果 $\Delta\left(\frac{y_k}{u_k}\right)=0$，则 $k\in[1,n]$且 $y_k=cu_k$. 相反，若 y 是 u 的常数倍，则 $J[y]=c^2J[u]=0$. 证毕.

引理 4.4.3 设 $u=(u_0,u_1,\cdots,u_{n+1})$是方程(4.4.1)的解，$k\in[1,n]$时 $u_k>0$，且 $u_0+au_1\geqslant 0$ 和 $u_{n+1}-bu_n\geqslant 0$ 中至少有一个是严格不等式，则对任意相容向量 $y=(y_0,y_1,\cdots,y_{n+1})$有 $J[y]>0$.

证明与引理 4.4.3 的方法相似，故省略.

引理 4.4.4 如果 $\varphi(k)=ak+b$，那么

(i) $\Delta\varphi^{\tau+1}(k)\geqslant a(\tau+1)\varphi^{\tau}(k), \tau\geqslant 0, a\geqslant 0, \varphi(k)\geqslant 0$,

(ii) $\Delta\varphi^{\tau+1}(k)>a(\tau+1)\varphi^{\tau}(k), -1<\tau<0, a>0, \varphi(k)\geqslant 0$,

(iii) $(\Delta\varphi^{\frac{\tau}{2}}(k))^2\leqslant\frac{a\tau^2}{4(\tau-1)}\Delta\varphi^{\tau-1}(k-1), 1\leqslant\tau\leqslant 2, \tau\neq 1, a\geqslant 0$, $\varphi(k-1)>0$,

(iv) $(\Delta\varphi^{\tau/2}(k))^2<\frac{a\tau^2}{4(\tau-1)}\Delta\varphi^{\tau-1}(k+1)$, $\tau>2$, $a>0$, $\varphi(k)\geqslant 0$,

(v) $a\varphi^{\tau}(k) \geqslant \frac{1}{\tau+1}\Delta\varphi^{\tau+1}(k-1), \tau \geqslant 0, \varphi(k-1) \geqslant 0, a \geqslant 0,$

(vi) $a\varphi^{\tau}(k) > \frac{1}{\tau+1}\Delta\varphi^{\tau+1}(k), \tau < 0, \tau \neq -1, \varphi(k) > 0, a > 0.$

证明 假设 $\tau \geqslant 0, a \geqslant 0, \varphi(k) \geqslant 0$,由中值定理可知

$$\Delta\varphi^{\tau+1}(k) = \varphi^{\tau+1}(k+1) - \varphi^{\tau+1}(k) = a(\tau+1)\varphi^{\tau}(\xi_k)$$
$$\geqslant a(\tau+1)\varphi^{\tau}(k), \quad k < \xi_k < k+1.$$

这就证明了(i).关于(ii)的情形类似可证.

如果 $0 \leqslant \tau \leqslant 2, \tau \neq 1, a \geqslant 0, \varphi(k-1) > 0$,那么

$$\{\Delta\varphi^{\frac{\tau}{2}}(k)\}^2 = \{\varphi^{\frac{\tau}{2}}(k+1) - \varphi^{\frac{\tau}{2}}(k)\}^2 = \frac{a\tau^2}{4}\{a\varphi^{\tau-2}(\mu_k)\}$$
$$\leqslant \frac{a\tau^2}{4}\{a\varphi^{\tau-2}(k)\} \leqslant \frac{a\tau^2}{4}\int_{\varphi(k-1)}^{\varphi(k)} x^{\tau-2}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{a\tau^2}{4(\tau-1)}\Delta\varphi^{\tau-1}(k-1), \quad k < \mu_k < k+1.$$

于是(iii)成立.(iv)的证明与(iii)类似.

当 $\tau \geqslant 0, a \geqslant 0, \varphi(k-1) \geqslant 0$ 时,有

$$a\varphi^{\tau}(k) = a(ak+b)^{\tau} \geqslant \int_{\varphi(k-1)}^{\varphi(k)} x^{\tau}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{\tau+1}\{\varphi^{\tau+1}(k) - \varphi^{\tau+1}(k-1)\}$$
$$= \frac{1}{\tau+1}\Delta\varphi^{\tau+1}(k-1),$$

即(v)成立.(vi)类似可得.证毕.

定理 4.4.1 方程(4.4.1)非振动当且仅当存在一个正整数 M 使得

$$\sum_{k=M+1}^{N} b_k y_k^2 < y_{M+1}^2 + \sum_{k=M+1}^{N-1} (\Delta y_k)^2 \tag{4.4.4}$$

对任意非退化向量$(y_{M+1}, y_{M+2}, \cdots, y_N)$成立.

证明 如果(4.4.1)非振动,则有解$\{x_k\}$使得 $k \geqslant M$ 时$x_k > 0$.由

引理 4.4.1 可知 $k \geqslant M$ 时 $\Delta x_k > 0$. 由引理 4.4.3 知(4.4.4)成立.

相反,设有正整数 M 使得对任意非退化向量$(y_{M+1}, y_{M+2}, \cdots, y_N)$有(4.4.4)成立. 令 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ 是方程(4.4.1)由条件 $x_M = 0$ 和 $x_{M+1} = 1$确定的解, 我们可证明当 $k > M$ 时 $\Delta x_k > 0$. 如果矛盾, 则设 $N > M$ 是 Δx_k 非正的第一项, 且 $M+1 \leqslant k \leqslant N$ 时 $x_k > 0$. 令 $y_k = x_k$, 这时有 $J[y] = 0$. 即

$$\begin{aligned} & y_{M+1}^2 + \sum_{k=M+1}^{N}(\Delta y_k)^2 - \sum_{k=M+1}^{N} b_k y_k^2 \\ &= x_{M+1}^2 + \sum_{k=M+1}^{N-1}(\Delta x_k)^2 - \sum_{k=M+1}^{N} b_k x_k^2 \\ &= -\left(1 - \frac{x_{N+1}}{x_N}\right)x_N^2 = x_N \Delta x_N \leqslant 0. \end{aligned}$$

这是一个矛盾. 证毕.

例 4.4.1　考虑差分方程

$$\Delta^2 x_{k-1} + \frac{1}{(4k+1)(4k+2)} x_k = 0, \quad k = 1,2,\cdots, \tag{4.4.5}$$

(4.4.5)的 Riccati 方程是

$$\gamma_k + \frac{1}{\gamma_{k-1}} = 2 - \frac{1}{(4k+1)(4k+2)}, \quad k = 2,3,\cdots.$$

令 $\gamma_1 = \frac{5}{4}$, 归纳可证

$$\gamma_k > 1 + \frac{1}{4(k+1)}, \quad k = 1,2,\cdots.$$

这时令 $x_0 = 43/60, x_1 = 1, x_{k+1} = \prod_{i=1}^{k} r_i$. 易知它是(4.4.5)的一个正解. 因此(4.4.5)非振动. 而对任一非退化向量$(y_{M+1}, y_{M+2}, \cdots, y_N)$, 我们有

$$y_{M+1}^2 + \sum_{k=M+1}^{N-1}(\Delta y_k)^2 - \sum_{k=M+1}^{N} \frac{1}{(4k+1)(4k+2)} y_k^2$$

$$= y_{M+1}^2 + \sum_{k=M+1}^{N-1} \{ y_k^2 - 2y_k y_{k+1} + y_{k+1}^2 \} - \sum_{k=M+1}^{N} \left(\frac{1}{(4k+1)} - \frac{1}{(4k+2)} \right) y_k^2$$

$$= \left[1 - \frac{1}{4(M+1)+1} \right] y_{M+1}^2 + \frac{1}{4N+2} y_N^2$$

$$+ \sum_{k=M+1}^{N-1} \left\{ \left[1 + \frac{1}{4k+2} \right] y_k^2 - 2y_k y_{k+1} + \left[1 - \frac{1}{4(k+1)+1} \right] y_{k+1}^2 \right\}.$$

因为

$$\left[1 + \frac{1}{4k+2} \right] \cdot \left[1 - \frac{1}{4(k+1)+1} \right] = \frac{16k^2 + 28k + 12}{16k^2 + 28k + 10} > 1,$$

且 $1 + \dfrac{1}{4k+2} > 0$,从而 $1 - \dfrac{1}{4(k+1)+1} > 0$.

于是

$$\left[1 + \frac{1}{4k+2} \right] y_k^2 - 2y_k y_{k+1} + \left[1 - \frac{1}{4(k+1)+1} \right] y_{k+1}^2 \geqslant 0,$$

而等式成立当且仅当 $y_k = y_{k+1} = 0$. 注意到$(y_{M+1}, \cdots, y_N)$是非退化的,则有

$$y_{M+1}^2 + \sum_{k=M+1}^{N-1} (\Delta y_k)^2 > \sum_{k=M+1}^{N} \frac{1}{(4k+1)(4k+2)} y_k^2.$$

由定理 4.4.1 可知(4.4.5)非振动.

设 $M < n < N$,令

$$y_k = \begin{cases} \dfrac{(k-M)}{(n-M)}, & M+1 \leqslant k \leqslant n, \\ 1, & k \geqslant n. \end{cases}$$

那么

$$y_{M+1}^2 + \sum_{k=M+1}^{N-1} (\Delta y_k)^2 = y_{M+1}^2 + \sum_{k=M+1}^{n-1} (\Delta y_k)^2 + \sum_{k=n}^{N-1} (\Delta y_k)^2$$

$$= \frac{1}{n-M}. \tag{4.4.6}$$

由(4.4.4)知

$$\sum_{k=n+1}^{N} b_k = \sum_{k=n+1}^{N} b_k y_k^2 \leqslant \sum_{k=M+1}^{N} b_k y_k^2 < \frac{1}{n-M}, \quad N > M+1. \tag{4.4.7}$$

现在让 N 任意大,由(4.4.7)推出

$$(n-M)\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k \leqslant 1.$$

令

$$b^* = \limsup_{n\to\infty} n \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k,$$

我们看到如果 $b^* > 1$,则(4.4.1)振动.

定理 4.4.2　如果方程(4.4.1)非振动且有 $0 \leqslant \alpha < 1, \beta > 1$,那么对任意实数 ω,有正整数 $M > \omega$ 使得

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \Big\{ &(n-\omega)^{1-\beta} \sum_{k=M+1}^{n} (k-\omega)^{\beta} b_k \\ &+ (n-\omega)^{1-\alpha} \sum_{k=n+1}^{\infty} (k-\omega)^{\alpha} b_k \Big\} \\ &\leqslant \frac{\beta-\alpha}{4}\left\{1 + \frac{1}{(\beta-1)(1-\alpha)}\right\}.\end{aligned} \tag{4.4.8}$$

证明　设 $\{x_k\}$ 是(4.4.1)的最终正解,则有 $M > \omega$ 使得 $k \geqslant M$ 有 $x_k > 0$. 由定理 4.4.1 知,对任一非退化向量 $(y_{M+1}, y_{M+2}, \cdots, y_N)$ 有(4.4.4)成立. 设 $n \in (M, N)$ 令

$$y_k = \begin{cases} \left(\dfrac{k-\omega}{n-\omega}\right)^{\frac{\beta}{2}}, & M < k < n, \\[2ex] \left(\dfrac{k-\omega}{n-\omega}\right)^{\frac{\alpha}{2}}, & n \leqslant k \leqslant N. \end{cases}$$

注意到

$$\Delta y_n = \left(\frac{n+1-\omega}{n-\omega}\right)^{\frac{\alpha}{2}} - 1 < \left(\frac{n+1-\omega}{n-\omega}\right)^{\frac{\beta}{2}} - 1.$$

则有

$$
\begin{aligned}
&y_{M+1}^2+\sum_{k=M+1}^{N-1}(\Delta y_k)^2\\
&<y_{M+1}^2+\sum_{k=M+1}^{n}\left[\left(\frac{k+1-\omega}{n-\omega}\right)^{\frac{\beta}{2}}-\left(\frac{k-\omega}{n-\omega}\right)^{\frac{\beta}{2}}\right]^2\\
&\quad+\sum_{k=n+1}^{N-1}\left[\left(\frac{k+1-\omega}{n-\omega}\right)^{\frac{\alpha}{2}}-\left(\frac{k-\omega}{n-\omega}\right)^{\frac{\alpha}{2}}\right]^2.
\end{aligned}
\tag{4.4.9}
$$

如果 $1<\beta\leqslant 2$，这时由引理4.4.4(iii)和(4.4.9)式可知

$$
\begin{aligned}
&y_{M+1}^2+\sum_{k=M+1}^{N-1}(\Delta y_k)^2\\
&<y_{M+1}^2+\frac{\beta^2}{4(\beta-1)(n-\omega)}\sum_{k=M+1}^{n}\left[\left(\frac{k-\omega}{n-\omega}\right)^{\beta-1}-\left(\frac{k-1-\omega}{n-\omega}\right)^{\beta-1}\right]\\
&\quad+\frac{\alpha^2}{4(\alpha-1)(n-\omega)}\sum_{k=n+1}^{N-1}\left[\left(\frac{k-\omega}{n-\omega}\right)^{\alpha-1}-\left(\frac{k-1-\omega}{n-\omega}\right)^{\alpha-1}\right]\\
&=y_{M+1}^2+\frac{\beta^2}{4(\beta-1)(n-\omega)}\left[1-\left(\frac{M-\omega}{n-\omega}\right)^{\beta-1}\right]\\
&\quad+\frac{\alpha^2}{4(\alpha-1)(n-\omega)}\left[-1-\left(\frac{N-1-\omega}{n-\omega}\right)^{\alpha-1}\right]\\
&<\left(\frac{M+1-\omega}{n-\omega}\right)^{\beta}+\frac{\beta^2}{4(\beta-1)(n-\omega)}+\frac{\alpha^2}{4(1-\alpha)(n-\omega)}.
\end{aligned}
\tag{4.4.10}
$$

因为

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=M+1}^{N}b_k y_k^2=&(n-\omega)^{-\beta}\sum_{k=M+1}^{n}(k-\omega)^{\beta}b_k\\
&+(n-\omega)^{-\alpha}\sum_{k=n+1}^{N}(k-\omega)^{\alpha}b_k,
\end{aligned}
\tag{4.4.11}
$$

由(4.4.4)和(4.4.10)可知

$$(n-\omega)^{-\beta}\sum_{k=M+1}^{n}(k-\omega)^{\beta}b_k+(n-\omega)^{1-\alpha}\sum_{k=n+1}^{N}(k-\omega)^{\alpha}b_k$$
$$<\left(\frac{M+1-\omega}{n-\omega}\right)^{\beta}+\frac{\beta^2}{4(\beta-1)(n-\omega)}+\frac{\alpha^2}{4(1-\alpha)(n-\omega)}.$$

于是

$$(n-\omega)^{-\beta}\sum_{k=M+1}^{n}(k-\omega)^{\beta}b_k+(n-\omega)^{1-\alpha}\sum_{k=n+1}^{\infty}(k-\omega)^{\alpha}b_k$$
$$<\left(\frac{M+1-\omega}{n-\omega}\right)^{\beta-1}+(M+1-\omega)+\frac{\beta^2}{4(\beta-1)}+\frac{\alpha^2}{4(1-\alpha)}.$$

即(4.4.8)成立.

如果 $\beta>2$,由(4.4.9)及引理4.4.4(iii)和(iv)可知

$$y_{M+1}^2+\sum_{k=M+1}^{N-1}(\Delta y_k)^2<y_{M+1}^2+$$
$$\frac{\beta^2}{4(\beta-1)(n-\omega)}\sum_{k=M+1}^{n}\left[\left(\frac{k+2-\omega}{n-\omega}\right)^{\beta-1}-\left(\frac{k+1-\omega}{n-\omega}\right)^{\beta-1}\right]$$
$$+\frac{\alpha^2}{4(\alpha-1)(n-\omega)}\sum_{k=n+1}^{N-1}\left[\left(\frac{k-\omega}{n-\omega}\right)^{\alpha-1}-\left(\frac{k-1-\omega}{n-\omega}\right)^{\alpha-1}\right]$$
$$=\left(\frac{M+1-\omega}{n-\omega}\right)^{\beta}+\frac{\alpha^2}{4(1-\alpha)(n-\omega)}\left[1-\left(\frac{n-\omega}{N-1-\omega}\right)^{1-\alpha}\right]$$
$$+\frac{\beta^2}{4(\beta-1)(n-\omega)}+\left[\left(\frac{n+2-\omega}{n-\omega}\right)^{\beta-1}-\left(\frac{M+2-\omega}{n-\omega}\right)^{\beta-1}\right]$$
$$<\left(\frac{M+1-\omega}{n-\omega}\right)^{\beta}+\frac{\beta^2}{4(\beta-1)(n-\omega)}\left(\frac{n+2-\omega}{n-\omega}\right)^{\beta-1}$$
$$+\frac{\alpha^2}{4(1-\alpha)(n-\omega)}. \qquad (4.4.12)$$

由(4.4.4),(4.4.11)和(4.4.12)有

$$(n-\omega)^{-\beta}\sum_{k=M+1}^{n}(k-\omega)^{\beta}b_k+(n-\omega)^{1-\alpha}\sum_{k=n+1}^{N}(k-\omega)^{\alpha}b_k$$

$$< \left(\frac{M+1-\omega}{n-\omega}\right)^{\beta} + \frac{1}{n-\omega}\left[\frac{\beta^2}{4(\beta-1)}\left(\frac{n+2-\omega}{n-\omega}\right)^{\beta-1} + \frac{\alpha^2}{4(1-\alpha)}\right].$$

于是

$$(n-\omega)^{1-\beta}\sum_{k=M+1}^{n}(k-\omega)^{\beta}b_k + (n-\omega)^{1-\alpha}\sum_{k=n+1}^{\infty}(k-\omega)^{\alpha}b_k$$

$$\leqslant \left(\frac{M+1-\omega}{n-\omega}\right)^{\beta-1}(M+1-\omega) + \frac{\beta^2}{4(\beta-1)}\left(\frac{n+2-\omega}{n-\omega}\right)^{\beta-1}$$

$$+ \frac{\alpha^2}{4(1-\alpha)}.$$

这也使得(4.4.8)成立. 证毕.

选择 $\omega=0$, 则(4.4.8)变为

$$\limsup_{n\to\infty}\left(n^{1-\beta}\sum_{k=M+1}^{n}k^{\beta}b_k + n^{1-\alpha}\sum_{k=n+1}^{\infty}k^{\alpha}b_k\right)$$

$$\leqslant \frac{\beta-\alpha}{4}\left[1+\frac{1}{(\beta-1)(1-\alpha)}\right]. \qquad (4.4.13)$$

这时令 $\alpha=0$, 由(4.4.13)可得

$$\limsup_{n\to\infty} n^{1-\beta}\sum_{k=M+1}^{n}k^{\beta}b_k \leqslant \frac{\beta^2}{4(\beta-1)}.$$

如果令 $\beta=2$, 由(4.4.13)可得

$$\limsup_{n\to\infty} n^{1-\alpha}\sum_{k=n+1}^{\infty}k^{\alpha}b_k \leqslant \frac{(2-\alpha)^2}{4(1-\alpha)}. \qquad (4.4.14)$$

下面的结果需要借助于数列$\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$, 其中

$$r_k = k^{1-\alpha}\sum_{k=k+1}^{\infty}j^{\alpha}b_j. \qquad (4.4.15)$$

$0\leqslant\alpha<1$. 这时如果(4.4.1)非振动, 由(4.4.14)可知$\{r_k\}$有界.

定理 4.4.3 设 $0\leqslant\alpha<1,\beta>1$, 方程(4.4.1)非振动, 那么有正整数 M 使得

$$\limsup_{n\to\infty} n^{1-\beta}\sum_{k=M+1}^{n-1}k^{\beta-2}r_k \leqslant \frac{1}{4}+\frac{1}{4(\beta-1)(1-\alpha)}. \quad (4.4.16)$$

证明 首先令

$$T_k = k^{\alpha-1} r_k = \sum_{j=k+1}^{\infty} j^{\alpha} b_j, \quad k \geqslant M.$$

由(4.4.14)，T_k 有界且满足

$$\Delta T_k = -(k+1)^{\alpha} b_{k+1} \leqslant 0, k \geqslant M,$$
$$b_k = -k^{-\alpha} \Delta T_{k-1}, \quad k \geqslant M+1.$$

如果 $\beta-\alpha-1 \geqslant 0$，这时有

$$\begin{aligned}\sum_{k=M+1}^{n} k^{\beta} b_k &= -\sum_{k=M+1}^{n} k^{\beta-\alpha} \Delta T_{k-1} \\ &= -(n+1)^{\beta-\alpha} T_n + (M+1)^{\beta-\alpha} T_M + \sum_{k=M+1}^{n} T_k \Delta k^{\beta-\alpha} \\ &= -n^{\beta-\alpha} T_n + (M+1)^{\beta-\alpha} T_M + \sum_{k=M+1}^{n-1} T_k \Delta k^{\beta-\alpha} \\ &> -n^{\beta-\alpha} T_n + \sum_{k=M+1}^{n-1} T_k (\beta-\alpha) k^{\beta-\alpha-1} \\ &= -n^{\beta-1} r_n + (\beta-\alpha) \sum_{k=M+1}^{n-1} r_k k^{\beta-2}.\end{aligned}$$

在第二个不等式中我们应用了引理 4.4.4 (i).

如果 $\beta-\alpha-1<0$，这时有

$$\begin{aligned}\sum_{k=M+1}^{n} k^{\beta} b_k &= -\sum_{k=M+1}^{n} k^{\beta-\alpha} \Delta T_{k-1} \geqslant -\sum_{k=M+1}^{n} (k-1)^{\beta-\alpha} \Delta T_{k-1} \\ &= -n^{\beta-\alpha} T_n + M^{\beta-\alpha} T_M + \sum_{k=M+1}^{n} T_k \Delta (k-1)^{\beta-\alpha} \\ &> -n^{\beta-\alpha} T_n + \sum_{k=M+1}^{n-1} T_k (\beta-\alpha) k^{\beta-\alpha-1} \\ &= -n^{\beta-1} r_n + (\beta-\alpha) \sum_{k=M+1}^{n-1} r_k k^{\beta-2},\end{aligned}$$

其中应用了引理 4.4.4 (ii). 证毕.

定理 4.4.4 如果方程(4.4.1)非振动，$0 \leqslant \alpha < 1$，那么

$$\liminf_{n\to\infty} n^{1-\alpha}\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{\alpha}b_k \leqslant \frac{1}{4(1-\alpha)}. \tag{4.4.17}$$

证明 如果 $1<\beta<2$，由定理 4.4.3 知有正整数 M 使得(4.4.16)成立. 当 $z\in(M+1,n-1)$时，有

$$\limsup_{n\to\infty}\left(n^{1-\beta}\sum_{k=M+1}^{z-1}k^{\beta-2}r_k + n^{1-\beta}\sum_{k=z}^{n-1}k^{\beta-2}r_k\right)$$
$$\leqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{4(\beta-\alpha)(1-\alpha)}. \tag{4.4.18}$$

设 $m_z=\inf\{r_k\mid k=z,z+1,\cdots\}$，那么由引理 4.4.4(vi)，

$$n^{1-\beta}\sum_{k=z}^{n-1}k^{\beta-2}r_k \geqslant m_z\sum_{k=z}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^{\beta-2}\cdot\frac{1}{n}$$
$$> m_z\sum_{k=z}^{n-1}\frac{1}{\beta-1}\Delta\left(\frac{k}{n}\right)^{\beta-1} = \frac{m_z}{\beta-1}\left[1-\left(\frac{z}{n}\right)^{\beta-1}\right].$$

于是

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4(\beta-1)(1-\alpha)} \geqslant \limsup_{n\to\infty} n^{1-\beta}\sum_{k=z}^{n-1}k^{\beta-2}r_k \geqslant \frac{m_z}{\beta-1}.$$

两边乘 $\beta-1$，再令 $\beta\to1$，我们有

$$m_z \leqslant \frac{1}{4(1-\alpha)}.$$

证毕.

$\alpha=0$ 时，(4.4.17)变为

$$\liminf_{n\to\infty} n\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k \leqslant \frac{1}{4}. \tag{4.4.19}$$

§ 4.5 Emden-Fowler 方程

本节中将考虑二阶非线性差分方程

$$\Delta^2 x_{n-1} + q_n x_n^{\gamma} = 0, \quad n = 1,2,\cdots, \tag{4.5.1}$$

其中 γ 是正的奇数之比，$\{q_n\}$是实数列且对所有大 n 不恒为零. 方

程(4.5.1)是众所周知的 Emden-Fowler 方程.

首先我们考虑$\{q_n\}\geqslant 0$的情况.对(4.5.1)求和有

$$\Delta x_n = \Delta x_k - \sum_{i=k+1}^{n} q_i x_i^{\gamma}, \quad 0 \leqslant k < n. \tag{4.5.2}$$

再对上式关于 n 求和,有

$$x_{n+1} - x_{k-1} = (n-k)\Delta x_k - \sum_{i=k+1}^{n}(n+1-i)q_i x_i^{\gamma}. \tag{4.5.3}$$

对于(4.5.1)两边乘以 n, 再求和有

$$\sum_{j=k+1}^{n} j\Delta x_j = \sum_{j=k+1}^{n} j\Delta x_{j-1} - \sum_{j=k+1}^{n} jq_j x_j^{\gamma}, \quad 0 \leqslant k < n.$$

于是有

$$n(x_{n+1} - x_n) = k(x_{k+1} - x_k) + x_n - x_k - \sum_{j=k+1}^{n} jq_j x_j^{\gamma}. \tag{4.5.4}$$

引理4.5.1　如果有 N,M 使得$N<n<M$时有 $\Delta^2 x_{n-1}\leqslant 0$, 则有,

(a) $x_n \leqslant x_N + \Delta x_N(n-N)$,　$N<n\leqslant M$.

(b) $x_n \geqslant x_N + \Delta x_{n-1}(n-N)$,　$N<n\leqslant M$.

(c) $x_n \leqslant \alpha n, N<n<M, \alpha>0$ 是常数.

如果附加条件 $x_N\geqslant 0, \Delta^2 x_{n-1}\leqslant 0, \Delta x_n>0, n\geqslant N\geqslant 1$,则

(d) $\dfrac{x_n}{\Delta x_{n-1}} \geqslant \dfrac{n}{2}$, $n\geqslant 2N$.

证明　如果 $N<n<M$ 有 $\Delta^2 x_{k-1}\leqslant 0$, 即有 $\Delta x_k \leqslant \Delta x_{k-1}$. 因此对任意的 $N<n\leqslant M$, 我们有

$$x_n - x_N = \sum_{k=N}^{n-1}\Delta x_k \leqslant \sum_{k=N}^{n-1}\Delta x_N = (n-N)\Delta x_N.$$

即(a)成立.(b)类似可证.而(c)可由(a)得证.

注意到(b), 当 $n\geqslant 2N$ 时, 有

$$x_n \geqslant \Delta x_{n-1}(n-N) \geqslant \frac{1}{2}n\Delta x_{n-1}.$$

由条件可知(d)成立,证毕.

引理 4.5.2 设$\{x_n\}_{n=N}^{\infty}$是方程(4.5.1)的一个正解,则对于 $n\geqslant N$, 有 $x_{n+1}\geqslant x_n$ 和 $0<\Delta x_{n+1}\leqslant\Delta x_n$ 成立.

证明 由(4.5.1)显知 $n\geqslant N$ 时 $x_n>0,\Delta x_{n+1}\leqslant\Delta x_n$. 假设对某一 $k\geqslant N$ 有 $\Delta x_k<0$, 由(4.5.3)可知 x_n 最终为负. 如果 $\Delta x_k=0$, 由(4.5.3)知有 $m>k$ 使得 $\Delta x_m<0$. 于是我们说当 $n\geqslant N$ 时 $x_{n+1}-x_n=\Delta x_n>0$ 恒成立. 证毕.

对于(4.5.1)的负解也有类似于引理 4.5.2 的结果.

定理 4.5.1 设 $\gamma>1$, 则方程(4.5.1)振动的充要条件是

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} nq_n = \infty. \tag{4.5.5}$$

证明 设(4.5.1)有一个最终正解$\{x_n\}$, 不妨设 $n\geqslant N>0$ 时 $x_n>0$. 由引理 4.5.2 可知 x_n 单增,Δx_n 是正的且非增 . 对(4.5.1)两边乘以 $nx_n^{-\gamma}$, 并求和,则有

$$\sum_{n=N}^{k-1} nx_n^{-\gamma}\Delta^2 x_{n-1} + \sum_{n=N}^{k-1} nq_n = 0, \quad k>N. \tag{4.5.6}$$

于是利用分步和有

$$kx_k^{-\gamma}\Delta x_{k-1} - Nx_N^{-\gamma}\Delta x_{N-1} - \sum_{n=N}^{k-1}\Delta x_n\Delta(nx_k^{-\gamma}) + \sum_{n=N}^{k-1} nq_n = 0. \tag{4.5.7}$$

由引理 4.5.2 及(4.5.7)有

$$\sum_{n=N}^{k}\Delta x_n\Delta(nx_k^{-\gamma}) \to \infty. \tag{4.5.8}$$

另一方面,

$$\Delta(nx_n^{-\gamma}) = (n+1)x_{n+1}^{-\gamma} - nx_n^{-\gamma} = x_{n+1}^{-\gamma} + n\Delta(x_n^{-\gamma}).$$

因为 $\gamma>1$,于是由引理 4.5.2 可知 $\Delta(x_n^{-\gamma})<0$. 这样就有

$$\sum_{n=N}^{k}\left[x_{n+1}^{-\gamma}\Delta x_n + n\Delta x_n(x_n^{-\gamma})\right]\leqslant \sum_{n=N}^{k} x_{n+1}^{-\gamma}\Delta x_n.$$

令，$f(x)=x_n+(\Delta x_n)(x-n)$，$n\leqslant x\leqslant n+1$，$n\geqslant N$. 那么，$f(n)=x_n$，$f(n+1)=x_{n+1}$，且 $f'(x)=\Delta x_n>0$，$n<x<n+1$. 因此，$f(x)$ 当 $x\geqslant N$ 时是单增的连续函数.

$$x_{n+1}^{-\gamma}\Delta x_n=\int_n^{n+1}x_{n+1}^{-\gamma}\Delta x_n\mathrm{d}x=\int_n^{n+1}f^{-\gamma}(n+1)f'(x)\mathrm{d}x$$

$$<\int_n^{n+1}f^{-\gamma}(x)f'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{1-\gamma}[f^{1-\gamma}(n+1)-f^{1-\gamma}(n)].$$

于是

$$\sum_{n=N}^{k}x_{n+1}^{-\gamma}\Delta x_n\leqslant\frac{1}{1-\gamma}[f^{1-\gamma}(k+1)-f^{1-\gamma}(N)].$$

注意 $\lim\limits_{k\to\infty}f^{1-\gamma}(k+1)$ 存在. 于是有(4.5.8)收敛. 这是一个矛盾.

如果

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}nq_n<\infty,\tag{4.5.9}$$

则有 N 使得

$$\max_{n\geqslant N}\left\{\sum_{i=n+1}^{\infty}(i-n)q_i,2\gamma\sum_{i=n+1}^{\infty}(i-n)q_i\right\}<\frac{1}{2}.\tag{4.5.10}$$

l_∞^N 是形如 $\{x_n\}_{n=N}^{\infty}$ 的所有有界数列构成的 Banach 空间，范数是上确界范数，令

$$\Omega=\left\{x_n\in l_\infty^N:\frac{1}{2}\leqslant x_n\leqslant 1\right\}.$$

显然，Ω 是 l_∞^N 的有界闭凸集. 定义算子 $T:\Omega\to l_\infty^N$ 如下：

$$(Tx)_n=1-\sum_{i=n+1}^{\infty}(i-n)q_ix_i^{\gamma},\quad n\geqslant N.$$

由 Ω 的定义显然有 $T\Omega\subseteq\Omega$. 注意到对于 $x,y\in\Omega$ 恒有

$$|x_i^{-\gamma}-y_i^{\gamma}|\leqslant 2\gamma|x_i-y_i|,\quad i\geqslant N.$$

于是

$$|(Tx)_n-(Ty)_n|\leqslant\sum_{i=n+1}^{\infty}(i-n)q_i|x_i^{\gamma}-y_i^{\gamma}|$$

$$\leqslant 2\gamma \sum_{i=n+1}^{\infty}(i-n)q_i|x_i - y_i| \leqslant \frac{1}{2}\|x-y\|.$$

即 T 是压缩的．于是 T 在 Ω 中有不动点 $x=\{x_n\}_{n=N}^{\infty}$，它也是(4.5.1)的一个解．证毕．

定理 4.5.1 证明的后半部分对于 $0<\gamma<1$ 也成立．相反，如果(4.5.1)有一个有界最终正解 $\{x_n\}$，可知它是单增有上界的．这样由(4.5.4)可知 $\sum\limits_{n=N}^{\infty} nq_n < \infty$．于是，我们有如下定理：

定理 4.5.2 方程(4.5.1)有有界最终正解的充要条件是(4.5.9)成立．

定理 4.5.3 假设 $0<\gamma<1$，则(4.5.1)振动的充要条件是

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} n^{\gamma} q_n = \infty. \tag{4.5.11}$$

证明 设有 $n \geqslant N$ 使得 $x_n>0$ 是(4.5.1)的解，由引理 4.5.2 知 x_n 单增，Δx_n 是正的非增的．用 $(\Delta x_{n-1})^{\gamma}$ 除以(4.5.1)并利用引理 4.5.1(d)可知

$$\sum_{n=2N}^{k} \frac{\Delta^2 x_{n-1}}{(\Delta x_{n-1})^{\gamma}} + \sum_{n=2N}^{k} \frac{q_n n^{\gamma}}{2^{\gamma}} \leqslant 0, \quad k \geqslant 2N. \tag{4.5.12}$$

由(4.5.11)可知

$$\sum_{n=2N}^{\infty} \frac{\Delta^2 x_{n-1}}{(\Delta x_{n-1})^{\gamma}} = -\infty.$$

另一方面，令

$$f(x) = x_n + \Delta x_n (x-n), \quad n \leqslant x < n+1, n \geqslant N.$$

由定理 4.5.1 的证明可知 f 是正的连续增函数．

$$g(x) = f(x+1) - f(x), \quad x \geqslant N, g'(x) = \Delta x_n - \Delta x_{n-1} \leqslant 0.$$

于是

$$\frac{\Delta^2 x_{n-1}}{(\Delta x_{n-1})^{\gamma}} = \int_{n-1}^{n} \frac{\Delta^2 x_{n-1}}{(\Delta x_{n-1})^{n}} \mathrm{d}x \geqslant \int_{n-1}^{n} \frac{g'(x)}{g^{\gamma}(x)} \mathrm{d}x.$$

这样

$$\sum_{n=2N}^{k}\frac{\Delta^2 x_{n-1}}{(\Delta x_{n-1})^r}\geqslant\int_{2N-1}^{k}\frac{g'(x)}{g^r(x)}\mathrm{d}x=\frac{g^{1-r}(k)-g^{1-r}(2N-1)}{1-r}.$$

但 $k\geqslant N$ 时 $g^{1-r}(k)>0$. 这是一个矛盾.

如果 $\sum_{n=N_0}^{\infty}n^r q_n<\infty$, 则存在 N 使得

$$\sum_{n=N}^{\infty}n^r q_n<\frac{1}{2},$$

给定初始条件 $x_N=0, x_{N+1}=1$, 由于(4.5.1)是一递推关系, 于是可求得(4.5.1)的一个解 $\{x_n\}_{n=N}^{\infty}$. 这时有 $\Delta x_N=1$, 假设 $N\leqslant j\leqslant n$ 时 $\frac{1}{2}\leqslant\Delta x_j\leqslant 1$, 那么 $N\leqslant j\leqslant n$ 时有 $x_j>0$. 由引理 4.5.1(a)可知

$$x_j\leqslant\Delta x_N(j-N)=j-N\leqslant j,\quad N<j\leqslant n.$$

$$\Delta x_n=\Delta x_n-\sum_{j=N+1}^{n}q_j x_j^r\geqslant 1-\sum_{j=N+1}^{n}q_j j^r\geqslant\frac{1}{2}.$$

而 $\Delta x_n\leqslant\Delta x_N=1$ 是显然的. 因此, $n\geqslant N$ 时 $\frac{1}{2}\leqslant\Delta x_n\leqslant 1$, 由此可得 $x_n>0$, $n\geqslant N+1$. 证毕.

注意到对任意的实数 α, 令

$$q_n=(n+1)^{\alpha r}[(n+2)^{-\alpha}+2(n+1)^{-\alpha}+n^{-\alpha}].$$

时, 方程(4.5.1)有解 $x_n=(-1)^n(n+1)^{-\alpha}$. 因此, 对非线性方程(4.5.1)其振动解和非增振动解会同时存在. 另外, 对于 $0<r<1$, 方程(4.5.1)总存在振动解.

接下来我们看 $q_n\leqslant 0$ 的情况. 为了讨论上的方便, 我们将方程(4.5.1)写成

$$\Delta^2 x_{n-1}=q_n x_n^r,\ n=1,2,3,\cdots.\qquad(4.5.13)$$

引理4.5.3　如果 $x_{N-1}\leqslant x_N$, $x_N\geqslant 0$, 则由初始条件 x_{N-1}, x_N 确定的(4.5.13)的解满足 x_n 和 Δx_n 非减和非负; 类似地, 如果 $x_{N-1}\geqslant$

$x_N, x_N \leqslant 0$,则由初始条件确定的解满足 x_n 和 Δx_n 非增和非正.

证明 由(4.5.13)可知

$$x_{N+1} - x_N = x_N - x_{N-1} + q_N x_N^r. \tag{4.5.14}$$

因为 $q_N \geqslant 0$,这时如果 $x_N \geqslant 0, \Delta x_{N-1} \geqslant 0$,由(4.5.14)可知 $x_{N+1} - x_N \geqslant x_N - x_{N-1} \geqslant 0$. 即 $\Delta x_N \geqslant \Delta x_{N-1}, x_{N+1} \geqslant x_N$. 由归纳法可证命题成立. 命题的后半部分类似可得,证毕.

由引理 4.5.3 可知,满足引理 4.5.3 的(4.5.13)的解均是非振动和单调的. 下面给出更一般的结果.

推论 4.5.1 方程(4.5.13)非退化解最终是非振动的单调解.

证明 如果 x_n 是(4.5.13)的一个非退化振动解,则必然有任意大的 N, 使得 $x_{N-1} < 0, x_N \geqslant 0$,或 $x_{N-1} > 0, x_N \leqslant 0$ 成立. 而由初始条件 x_{N-1}, x_N 确定的解是非振动和单调的. 由解的唯一性可知矛盾. 即(4.5.13)是非振动的, 比较引理 4.5.3, 我们只有初始条件为 $x_0 > x_1 > 0$ 和 $x_0 < x_1 < 0$ 时的单调性未给出证明. 当 $x_0 > x_1 > 0$ 时, (4.5.13)的解有三种可能:

(a) x 是非增正的; (b). 有最小的 N 使得 $x_N \leqslant 0$; (c)有最小的 N 使得 $x_{N-1} < x_N$.

(a)成立, 则 x 单调. (b)和(c)成立, 可由引理 4.5.3 得证. 证毕.

定理 4.5.4 设 x, y 是方程(4.5.13)的解,满足条件

$$x_M \leqslant y_M, \quad x_{M+1} > y_{M+1}, \tag{4.5.15}$$

或者

$$x_M < y_M, \quad x_{M+1} \geqslant y_{M+1}. \tag{4.5.16}$$

则 $n > M+1$ 时 $x_n > y_n$, $n < M$ 时 $x_n < y_n$, 且 $x_n - y_n$ 单增. 同时

$$x_n - y_n \geqslant (n - M)(x_{M+1} - y_{M+1}), \quad n \geqslant M+1,$$

$$x_n - y_n \leqslant (M - n + 1)(x_M - y_M), \quad n \leqslant M.$$

证明 由(4.5.13)可知

$$x_{M+2}-2x_{M+1}+x_M=q_{M+1}x_{M+1}^r\geqslant q_{M+1}y^r y_{M+1}$$
$$=y_{M+2}-2y_{M+1}+y_M. \tag{4.5.17}$$

由(4.5.15)或(4.5.16)及(4.5.17)可知

$$x_{M+2}-y_{M+2}\geqslant 2(x_{M+1}-y_{M+1})-(x_M-y_M)>0. \tag{4.5.18}$$

令

$$w_k=x_{M+k}-y_{M+k},\quad k\geqslant 0.$$

由(4.5.15)或(4.5.16)知，$w_0\leqslant 0$，$w_1\geqslant 0$，同时由(4.5.18)有 $w_2\geqslant 2w_1-w_0\geqslant 2w_1$，则归纳可知

$$w_k\geqslant\left(\frac{k}{k-1}\right)w_{k-1}\geqslant 0,\quad k\geqslant 2. \tag{4.5.19}$$

再由(4.5.18)有 $w_2>0$，因此，$k\geqslant 2$ 时 $w_k>0$. 由(4.5.19)有 $k\geqslant 2$，$w_{k+1}\geqslant w_k$. 即 x_n-y_n 当 $n\geqslant M+1$ 时是单增的. 重复利用(4.5.19)有

$$w_k\geqslant\frac{k}{k-1}\cdot\frac{k-1}{k-2}\cdot\frac{k-2}{k-3}\cdots\frac{2}{1}w_1=kw_1,k\geqslant 2,$$

即 $x_n-y_n\geqslant(n-M)(x_{M+1}-y_{M+1})$. $n<M$ 时，令

$$u_k=x_{M+1-k},v_k=-y_{M+1-k},k=0,1,2,\cdots,M+1.$$

u_k 和 v_k 是方程

$$u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}=q_{M+1-k}u_k^r,k=1,2,\cdots,M$$

的解，应用前面的讨论可证定理后半部分成立. 证毕 .

由定理 4.5.4 不难得到如下结果.

推论 4.5.2　方程(4.5.13)存在单调无界解.

§4.6　二阶非线性差分方程(I)

考虑差分方程

$$\Delta(c_n\Delta y_n)+p_n y_{n+1}^r=0,\quad n=0,1,2,\cdots, \tag{4.6.1}$$

其中 r 是正的奇数之比，$c_n>0$ 满足

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{c_n}<\infty, \tag{4.6.2}$$

$\{p_n\}$是实数列.

定理 4.6.1 假设 $r>1, p_n\geqslant 0$,(4.6.2)成立,则方程(4.6.1)振动的充要条件是

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}p_i\rho_{i+1}^r=\infty, \tag{4.6.3}$$

其中

$$\rho_n=\sum_{i=n}^{\infty}\frac{1}{c_i}.$$

证明 设$\{y_n\}_{n=N}^{\infty}$是(4.6.1)的一个正解,由(4.6.1)知

$$\Delta(c_n\Delta y_n)\leqslant 0,\quad n\geqslant N,$$

和

$$c_n\Delta y_n\leqslant c_N\Delta y_N,\quad n\geqslant N. \tag{4.6.4}$$

即

$$\Delta y_n\leqslant c_N\Delta y_N/c_n,\quad n\geqslant N.$$

从 N 到 n 对上式求和,则有

$$y_{n+1}-y_N\leqslant(c_N\Delta y_N)\sum_{i=N}^{n}\frac{1}{c_i},\quad n\geqslant N. \tag{4.6.5}$$

由(4.6.2)知 y_n 有上界.由(4.6.4)也有

$$y_N\geqslant-(c_N\Delta y_N)\sum_{i=N}^{n}\frac{1}{c_i},\quad n\geqslant N.$$

令 $n\to\infty$则有

$$y_N\geqslant(c_N\Delta y_N)\rho_N, \tag{4.6.6}$$

由(4.6.4)可知 Δy_N 有两种可能,我们将分别给出证明.不妨先设 $n\geqslant N$时,$\Delta y_N>0$. 对(4.6.1)从 N 到 n 求和

$$\sum_{i=N}^{n}\Delta(c_i\Delta y_i)+\sum_{i=N}^{n}p_iy_{i+1}^r=0. \tag{4.6.7}$$

因此

$$c_{n+1}\Delta y_{n+1} - c_N\Delta y_N + \sum_{i=N}^{n} p_i y_{i+1}^r = 0,$$

或

$$\sum_{i=N}^{n} p_i y_{i+1}^r \leqslant c_N \Delta y_N.$$

令 $n\to\infty$,有

$$\sum_{i=N}^{\infty} p_i y_{i+1}^r < \infty.$$

注意到 y_n 单增, 因此有 $c>0$ 及 $N_1\geqslant N$ 使得 $n\geqslant N_1$ 时,$y_n\geqslant c$,从而有 $N_2\geqslant N_1$ 使得

$$y_n \geqslant \rho_n, \quad n \geqslant N_2.$$

于是

$$\sum_{i=N_2}^{\infty} p_i \rho_{i+1}^r < \infty.$$

这是一个矛盾.

现在再假设

$$\Delta y_n < 0, \quad n \geqslant N.$$

这时

$$\begin{aligned}\Delta((c_n\Delta y_n)^{-r+1}) &= (-r+1)\xi^{-r}\Delta(c_n y_n)\\ &= (-r+1)(-p_n y_{n+1}^r)\xi^{-r}, \quad c_{n+1}\Delta y_{n+1} < \xi < c_n\Delta y_n \end{aligned} \tag{4.6.8}$$

注意到(4.6.6), 由(4.6.8)可知

$$\begin{aligned}\Delta((c_n\Delta y_n)^{-r+1}) &\leqslant (-r+1)(-p_n y_{n+1}^r)(c_{n+1}\Delta y_{n+1})^{-r}\\ &\leqslant (-r+1)(c_{n+1}\Delta y_{n+1})^{-r}(c_{n+1}\Delta y_{n+1}\rho_{n+1})^r p_n.\end{aligned}$$

因此

$$\Delta((c_n\Delta y_n)^{-r+1}) \leqslant -(r-1)(p_n\rho_{n+1}^r), n \geqslant N. \tag{4.6.9}$$

从 N 到 n 对(4.6.9)求和, 则有

$$(c_{n+1}\Delta y_{n+1})^{-r+1}-(c_N\Delta y_N)^{-r+1}\leqslant-(r-1)\sum_{i=N}^{n}p_i\rho_{i+1}^r.$$

因此

$$-(c_{n+1}\Delta y_{n+1})^{-r+1}\geqslant(r-1)\sum_{i=N}^{n}p_i\rho_{i+1}^r-(c_N\Delta y_N)^{-r+1}.$$

令 $n\to\infty$，则有

$$\sum_{i=N}^{\infty}p_i\rho_{i+1}^r<\infty. \tag{4.6.10}$$

这仍是一个矛盾.

相反，我们假设(4.6.10)成立.考虑所有实数列 $\{y_n\}_{n=N}^{\infty}$ 构成的 Banach 空间 l_∞^N，其上的范数是

$$\|y\|=\sup\left(\frac{y_n}{\rho_n}\right),\quad n\geqslant N.$$

定义算子 $T:\Omega\to l_\infty^N$，

$$(T_y)_n=\frac{\rho_n}{2}+\rho_n\sum_{i=N-1}^{n-2}p_iy_{i+1}^r+\sum_{i=N}^{\infty}\rho_ip_{i-1}y_i^r,\ n\geqslant N+1.$$

$$(T_y)_N=\rho_n.$$

对任意的 $y\in\Omega,(T_y)_N\geqslant\frac{\rho_n}{2},n\geqslant N$.选择 N 足够大使得

$$\sum_{i=N-1}^{\infty}p_i\rho_{i+1}^r<\frac{1}{8r}.$$

因此

$$(Ty)_n\leqslant\rho\left(\frac{1}{2}+\sum_{i=N-1}^{n-2}p_i\rho_{i+1}^r+\sum_{i=n-1}^{\infty}p_i\rho_{i+1}^r\right)<\rho_n,n\geqslant N+1.$$

即有 $(T_y)_N\leqslant\rho_n,n\geqslant N$.任意 $x,y\in\Omega$ 有

$$\frac{1}{\rho_n}|(Tx)_n-(Ty)_n|\leqslant\sum_{i=N-1}^{n-2}p_i|x_{i+1}^r-y_{i+1}^r|+\frac{1}{\rho_n}\sum_{i=n}^{\infty}\rho_ip_{i-1}|x_i^r-y_i^r|$$

$$\leqslant\sum_{i=N-1}^{n-2}p_i\rho_{i+1}^r\left|\left(\frac{x_{i+1}}{\rho_{i+1}}\right)^r-\left(\frac{y_{i+1}}{\rho_{i+1}}\right)^r\right|+\sum_{i=n}^{\infty}p_{i-1}\rho_i^r\left|\left(\frac{x_i}{\rho_i}\right)^r-\left(\frac{y_i}{\rho_i}\right)^r\right|$$

$$\leqslant 2r\sum_{i=N-1}^{n-2}p_i\rho_{i+1}^r\left|\frac{x_{i+1}}{\rho_{i+1}}-\frac{y_{i+1}}{\rho_{i+1}}\right|+2r\sum_{i=n}^{\infty}p_{i-1}\rho_i^r\left|\frac{x_i}{\rho_i}-\frac{y_i}{\rho_i}\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\|x-y\|.$$

即，$\|Tx-Ty\|\leqslant\frac{1}{2}\|x-y\|$. 因此，$T$ 是 Ω 上的压缩映射，则有不动点 $x\in\Omega$，它是(4.6.1)的一个解. 证毕.

定理 4.6.2　假设 $0<r<1$, $p_n\geqslant 0$, (4.6.2)成立，则方程(4.6.1)振动的充要条件是

$$\sum_{i=N}^{\infty}p_i\rho_{i+1}=\infty. \tag{4.6.11}$$

证明　设 $n\geqslant N$ 时 $y_n>0$ 是(4.6.1)的解，则有

$$\Delta(c_n\Delta y_n)\leqslant 0,\quad n\geqslant N.$$

如果 $\Delta y_n>0$，我们有(4.6.10)成立，对于充分大的 n，我们有 $\rho_n\leqslant 1$，$\rho_n^r\geqslant\rho_n$. 因此有

$$\sum_{i=N}^{\infty}p_i\rho_{i+1}<\infty. \tag{4.6.12}$$

这是一个矛盾.

如果 $n\geqslant N$ 时 $\Delta y_n<0$，由(4.6.7)有

$$c_{n+1}\Delta y_{n+1}-c_N\Delta y_N+\sum_{i=N}^{n}p_iy_{i+1}^r=0,$$

$$-c_{n+1}\Delta y_{n+1}\geqslant\sum_{i=N}^{n}p_iy_{i+1}^r,$$

$$-\Delta y_{n+1}\geqslant\frac{1}{c_{n+1}}\sum_{i=N}^{n}p_iy_{i+1}^r,\quad n\geqslant N.$$

设 $\varepsilon<0$, $2\varepsilon<1-r$，考虑 $\Delta(y_{n+1}^{2\varepsilon})$.

$$-\Delta(y_{n+1}^{2\varepsilon})=-2\varepsilon(\xi)^{2\varepsilon-1}\Delta y_{n+1}$$

$$\geqslant 2\varepsilon(\xi)^{2\varepsilon-1}\left(\frac{1}{c_{n+1}}\right)\sum_{i=N}^{n}p_iy_{r_{i+1}}$$

$$\geqslant 2\varepsilon y_{n+1}^{2\varepsilon-1}\left(\frac{1}{c_{n+1}}\right)\sum_{i=N}^{n}p_i y_{r_i+1},\quad y_{n+2}<\xi<y_{n+1}.$$

因此

$$\Delta(y_{n+1}^{2\varepsilon})\geqslant\frac{2\varepsilon}{c_{n+1}}\sum_{i=N}^{\infty}p_i y_{i+1}^{+2\varepsilon-1}. \tag{4.6.13}$$

因为有 $H>0$ 使得 $n\geqslant N$ 时 $0<y_n\leqslant H$. 于是有 $k>0$ 使得

$$-\Delta(y_{n+1}^{2\varepsilon})\geqslant\frac{k}{c_{n+1}}\sum_{i=N}^{n}p_i.$$

上式求和有

$$y_{N+1}^{2\varepsilon}-y_{n+2}^{2\varepsilon}\geqslant k\sum_{i=N}^{n}\frac{1}{c_i}\sum_{j=N}^{i}p_j$$

$$\geqslant k\sum_{j=N}^{n}p_j\sum_{i=j}^{n}\frac{1}{c_{i+1}}.$$

令 $n\to\infty$ 可见(4.6.12)成立. 这也是一个矛盾.

如果(4.6.12)成立. l_∞^N 如前所定义，其上的范数为

$$\|y\| = \sup\{y_n\rho_n,\quad n\geqslant N\}.$$

令

$$S=\left\{y_n\in l_\infty^N:\frac{1}{2}\leqslant y_n\leqslant 1,\quad n\geqslant N\right\}.$$

定义算子 $T:S\to l_\infty^N$:

$$(Ty)_n=\frac{1}{2}+\rho_n\sum_{i=N-1}^{n-2}p_i y_{r+1}+\sum_{i=n}^{\infty}\rho_i p_{i-1}y_i,\quad n\geqslant N+1,$$

$$(Ty)_N=1.$$

选择 N 足够大，使得 $\rho_n\leqslant 1, n\geqslant N$, 且

$$\sum_{i=N}^{\infty}\rho_i p_{i-1}<\frac{1}{4}.$$

可证明 $TS\subseteq S$ 和 T 是压缩的. 因此, T 在 S 上有不动点 y, 它也是(4.6.1)的一个解. 证毕.

§4.7 二阶非线性差分方程(Ⅱ)

考虑二阶非线性差分方程

$$\Delta(r_n\Delta x_n)+p_nf(x_n)=0,\quad n=0,1,2,\cdots,\tag{4.7.1}$$

其中$\{r_n\}$是正数列并满足

$$\lim_{n\to\infty}R_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{r_k}=\infty,$$

$\{p_n\}$是实数列,$f\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$且对$x\neq0$有$xf(x)>0$.方程

$$\Delta^2x_n+p_nf(x_n)=0,\quad n=0,1,2,\cdots\tag{4.7.2}$$

显然是(4.7.1)的特殊情况.

定理 4.7.1 假设$\{r_n\}$非减且有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r_n}\sum_{k=n_0}^{n-1}k(\mu p_k^+-p_k^-)=\infty,\quad\mu>0\tag{4.7.3}$$

其中

$$p_k^+=\max(p_k,0),p_k^-=\min(p_k,0).$$

那么方程(4.7.1)的有界解$\{x_n\}$或者振动或者满足$\lim\limits_{n\to\infty}\inf|x_n|=0$.

证明 设$\{x_n\}$是(4.7.1)的有界最终正解,则有$n_1>n_0$使得$n>n_1$时$x_n>0$.如果$\lim\limits_{n\to\infty}\inf x_n>0$,则有$n_2\geqslant n_1$及正常数$c_1$和$c_2$使得$n>n_2$时$c_1\leqslant x_n\leqslant c_2$.由$f$的定义可知,存在正数$M_1$和$M_2$使得$n>n_2$时$M_1\leqslant f(x)\leqslant M_2$,对方程(4.7.1)两边乘以$n$并求和,则有

$$\sum_{k=n_2}^{n}k\Delta(r_k\Delta x_k)=-\sum_{k=n_2}^{n}kp_kf(x_k).\tag{4.7.4}$$

注意到

$$\sum_{k=n_2}^{n}k\Delta(r_k\Delta x_k)=nr_{n+1}\Delta x_{n+1}-n_2r_{n_2}\Delta x_{n_2}-\sum_{k=n_2+1}^{n}r_k\Delta x_k,$$

$$\sum_{k=n_2+1}^{n} r_k \Delta x_k = r_{n+1}x_{n+1} - r_{n_2+1}x_{n_2+1} - \sum_{k=n_2+1}^{n} x_{k+1}\Delta r_k.$$

于是有

$$\sum_{k=n_2}^{n} k\Delta(r_k\Delta x_k) \geqslant nr_{n+1}\Delta x_{n+1} - n_2 r_{n_2}\Delta x_{n_2} - c_2 r_{n+1}, \quad (4.7.5)$$

而

$$\sum_{k=n_2}^{n} kp_k f(x_n) \geqslant \sum_{k=n_2}^{n} k(M_1 p_k^+ + M_2 p_k^-)$$

$$= M_2 \sum_{k=n_2}^{n} k(\mu p_k^+ + p_k^-), \mu = \frac{M_1}{M_2}. \quad (4.7.6)$$

将(4.7.5)和(4.7.6)代入(4.7.4)中,则有

$$nr_{n+1}\Delta x_{n+1} - n_2 r_{n_2}\Delta x_{n_2} - c_2 r_{n+1} \leqslant - M_2 \sum_{k=n_2}^{n} k(\mu p_k^+ + p_k^-).$$

于是

$$n\Delta x_{n+1} - rn_2 r_{n_2}\Delta x_{n_2} - c_2 \leqslant n\Delta x_{n+1} - c_2 - \frac{r_{n_2} n_2 \Delta x_{n_2}}{r_{n+1}}$$

$$\leqslant - \frac{M_2}{r_{n+1}} \sum_{k=n_2}^{n} k(\mu p_k^+ + p_k^-),$$

其中

$$r = \begin{cases} 0, & \Delta x_{n_2} \leqslant 0, \\ 1, & \Delta x_{n_2} > 0. \end{cases}$$

这样由(4.7.3)可知,$\lim\limits_{n\to\infty} n\Delta x_{n+1} = -\infty$. 于是有 $n_3 \geqslant n_2$ 使得 $n \geqslant n_3$ 时 $\Delta x_{n+1} \leqslant \frac{-1}{n}$. 即有

$$x_{n+1} \leqslant x_{n_3+1} - \sum_{k=n_3}^{n-1} \frac{1}{k}, \quad n \geqslant n_3 + 1.$$

可见 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$,这是一个矛盾. 证毕.

推论 4.7.1　如果

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} n(\mu p_n^+ - p_n^-) = \infty, \quad \mu > 0.$$

则方程(4.7.2)的有界解 $\{x_n\}$ 或者振动或者满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\inf|x_n| = 0$.

定理 4.7.2　假设

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{r_n R_n} = \infty, \tag{4.7.7}$$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} R_{n+1}(\mu p_n^+ + p_n) = \infty, \quad \mu > 0, \tag{4.7.8}$$

则定理 4.7.1 的结论成立

证明　由定理 4.7.1 的证明可知 $M_1 \leqslant f(x_n) \leqslant M_2$. 于是,

$$\begin{aligned}\sum_{k=n_2}^{n} R_{k+1}\Delta(r_k\Delta x_k) &= -\sum_{n=n_2}^{n} R_{k+1}p_k f(x_k) \\ &\leqslant -M_2\sum_{k=n_2}^{n} R_{k+1}(\mu p_k^+ + p_k^-), \quad \mu = M_1/M_2.\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\sum_{k=n_2}^{n} R_{k+1}\Delta(r_k\Delta x_k) &= R_{n+1}r_{n+1}\Delta x_{n+1} - R_{n_2}r_{n_2}\Delta x_{n_2} - x_{n+1} + x_{n_2} \\ &\geqslant R_{n+1}r_{n+1}\Delta x_{n+1} + k,\end{aligned}$$

其中

$$k = -R_{n_2}r_{n_2}\Delta x_{n_2} - c_2 + x_{n_2}.$$

于是

$$R_{n+1}r_{n+1}\Delta x_{n+1} + k \leqslant -M_2\sum_{k=n_2}^{n} R_{k-1}(\mu p_k^- + p_k^-),$$

由(4.7.8)知 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n R_n \Delta x_n = -\infty$. 于是有 n_3 使得 $n \geqslant n_3$ 时 $\Delta x_n \leqslant \frac{-1}{r_n R_n}$. 求和并利用(4.7.6)有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$. 这是一个矛盾,证毕.

接下来我们考虑方程

$$\Delta^2 x_{n-1} + p_n f(x_n) = 0, n = 1,2,\cdots, \tag{4.7.9}$$

其中，$\{p_n\}$和 f 如前所定义，同时 f 在 $\mathbf{R}$ 上非减. 先考察几个引理.

定理 4.7.1 设$\{u_k\}_{k=k_0-1}^{k_3}$是 (4.7.9)的正解，如果 $1\leqslant k_0<k_3$，$k_1\in[k_0,k_3)$，使得

$$-\frac{\Delta u_{k_0-1}}{f(u_{k_0})}+\sum_{l=k_0}^{k} q_1+\sum_{l=k_0}^{k}\frac{\Delta f(u_l)\Delta u_l}{f(u_l)f(u_{l+1})}\geqslant m, \tag{4.7.10}$$

对所有的 $k\in[k_1,k_3)$成立，m 是正数. 则

$$\Delta u_k\leqslant -mf(u_{k_1}), \tag{4.7.11}$$

对所有的 $k\in[k_1,k_3)$成立.

证明 由(4.7.9)可知

$$\sum_{l=k_0}^{k}\frac{\Delta^2 u_{l-1}}{f(u_l)}+\sum_{l=k_0}^{k} q_l = 0.$$

由分步和，有

$$-\frac{\Delta u_{k_0-1}}{f(u_{k_0})}+\sum_{l=k_0}^{k}\frac{\Delta f(u_l)\Delta u_l}{f(u_l)f(u_{l+1})}+\sum_{l=k_0}^{k} q_l=-\frac{\Delta u_k}{f(u_{k+1})}.$$

由(4.7.10)及上式可得

$$-\frac{\Delta u_k}{f(u_{k+1})}\geqslant m+\sum_{l=k_0}^{k}\frac{\Delta f(u_l)\Delta u_l}{f(u_l)f(u_{l+1})}>0, k_1\leqslant k\leqslant k_3.$$

因此，$\Delta u_k<0$. 令 $w_k=-\Delta u_k$，则有

$$\frac{w_k}{f(u_{k+1})}\geqslant m-\sum_{l=k_1}^{k}\frac{\Delta f(u_l)w_l}{f(u_l)f(u_{l+1})}, k\in[k_1,k_3). \tag{4.7.12}$$

它对应的方程是

$$\frac{v_k}{f(u_{k+1})}=m-\sum_{l=k_1}^{k}\frac{\Delta f(u_l)v_l}{f(u_l)f(u_{l+1})}, k\in[k_1,k_3). \tag{4.7.13}$$

由(4.7.12)和(4.7.13)分别可得

$$\frac{w_k}{f(u_k)} \geqslant m - \sum_{l=k_1}^{k-1} \frac{\Delta f(u_l) w_l}{f(u_l) f(u_{l+1})},$$

$$\frac{v_k}{f(v_k)} = m - \sum_{l=k_1}^{k-1} \frac{\Delta f(u_l) v_l}{f(u_l) f(u_{l+1})}.$$

$w_{k_1} \geqslant mf(u_{k_1}) = v_{k_1}$是显然的. 归纳可证 $w_k \geqslant v_k, k \in [k_1 k_3)$. 注意到 (4.7.13), 则有

$$\Delta \frac{v_k}{f(u_{k+1})} = \frac{\Delta v_k}{f(u_{k+1})} + v_{k+1} \Delta \frac{1}{f(u_{k+1})} = - \frac{\Delta f(u_{k+1}) v_{k+1}}{f(u_{k+1}) f(u_{k+2})}.$$

于是$\frac{\Delta v_k}{f(u_{k+1})} = 0$. 即有 $\Delta v_k = 0$. 从而 $v_k = v_{k_1} = mf(u_{k_1})$. 即有

$$-\Delta u_k = w_k \geqslant v_k = mf(u_{k_1}), \quad k \in [k_1, k_3).$$

证毕.

推论 4.7.1 设$\{u_k\}_{k=k_1-1}^{\infty}$是(4.7.9)的正解, 如果

$$\lim_{n \to \infty} \inf \sum_{l=k_1}^{k} q_l > -\infty.$$

则

$$\sum_{l=k_1}^{\infty} \frac{\Delta f(u_l) \Delta u_l}{f(u_l) f(u_{l+1})} < \infty. \tag{4.7.14}$$

证明 如果(4.7.14)不成立, 注意到引理 4.7.1, 则有 $k_1^* \geqslant k_1$ 使得 $\Delta u_k \leqslant -mf(u_{k_1^*})$对所有 $k > k_1^*$ 成立. 由此可见 u_k 最终为负, 矛盾. 证毕.

推论 4.7.2 如果

$$\sum_{l=k}^{\infty} q_l = \infty, \tag{4.7.15}$$

则(4.7.9)振动.

接下来我们考虑

$$\sum_{l=k}^{\infty} q_l < \infty \tag{4.7.16}$$

的情形．

引理 4.7.2 假设且 $\lim_{|y|\to\infty}|f(y)|=\infty$ (4.7.16) 成立，u_k 是(4.7.9)的一个非振动解，则

$$\frac{\Delta u_k}{f(u_{k+1})}=\sum_{l=k+1}^{\infty}q_l+\sum_{l=k+1}^{\infty}\frac{\Delta f(u_l)\Delta u_l}{f(u_l)f(u_{l+1})},k\geqslant k_0. \quad (4.7.17)$$

证明 设 $k\geqslant k_0-1$ 时，$u_k>0$. 由推论 4.7.1 有

$$\sum_{l=k_0}^{\infty}\frac{\Delta f(u_l)\Delta u_l}{f(u_l)f(u_{l+1})}<\infty.$$

类似于引理 4.7.1，有

$$\begin{aligned}\frac{\Delta u_k}{f(u_{k+1})}&=\frac{\Delta u_{k_0-1}}{f(u_{k_0})}-\sum_{l=k_0}^{k}q_l-\sum_{l=k_{01}}^{k}\frac{\Delta f(u_l)\Delta u_l}{f(u_l)f(u_{l+1})}\\&=\frac{\Delta u_{k_0-1}}{f(u_{k_0})}-\sum_{l=k_0}^{\infty}q_l-\sum_{l=k_{01}}^{\infty}\frac{\Delta f(u_l)\Delta u_l}{f(u_l)f(u_{l+1})}\\&\quad+\sum_{l=k+1}^{\infty}q_l+\sum_{l=k+1_1}^{\infty}\frac{\Delta f(u_l)\Delta u_l}{f(u_l)f(u_{l+1})}\\&=\alpha+\sum_{l=k+1}^{\infty}q_l+\sum_{l=k+1}^{\infty}\frac{\Delta f(u_l)\Delta u_l}{f(u_l)f(u_{l+1})}.\end{aligned} \quad (4.7.18)$$

如果 $\alpha<0$，选择 k_2 充分大使得

$$\left|\sum_{l=k_2}^{k}q_l\right|\leqslant-\frac{\alpha}{4},\quad k\geqslant k_2,$$

$$\left|\sum_{l=k_2}^{\infty}\frac{\Delta f(u_l)\Delta u_l}{f(u_l)f(u_{l+1})}\right|<-\frac{\alpha}{4}.$$

让 $k_0=k_1=k_2$，这时引理 4.7.1 的条件均满足，于是有

$$\Delta u_k\leqslant-mf(u_{k_2}),\quad k\geqslant k_2,$$

则有 $\lim_{k\to\infty}u_k=-\infty$. 这是一个矛盾．

如果 $\alpha>0$，由(4.7.18)可知

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\Delta u_k}{f(u_{k+1})}=\alpha.$$

于是最终有 $\Delta u_k>0$. 从而有 $k_1\geqslant k_0$ 使得 $k\geqslant k_1$ 时

$$\frac{\Delta u_k}{f(u_{k+1})}\geqslant\frac{\alpha}{2},\tag{4.7.19}$$

$$\sum_{l=k_1}^{\infty}\frac{\Delta f(u_l)\Delta u_l}{f(u_l)f(u_{l+1})}\geqslant\frac{\alpha}{2}\sum_{l=k_1}^{\infty}\frac{\Delta f(u_l)}{f(u_l)}.$$

令

$$r(t)=f(u_l)+(t-l)\Delta f(u_l),\quad l\leqslant t\leqslant l+1,$$

显然 $r'(t)=\Delta f(u_l)$, $f(u_l)\leqslant r(t)\leqslant f(u_{l+1})$,

$$\frac{\Delta f(u_l)}{f(u_l)}=\int_l^{l+1}\frac{\Delta f(u_l)}{f(u_l)}\mathrm{d}t=\int_l^{l+1}\frac{r'(t)}{f(u_l)}\mathrm{d}t\geqslant\int_l^{l+1}\frac{r'(t)}{r(t)}\mathrm{d}t.$$

于是

$$\sum_{l=k_1}^{\infty}\frac{\Delta f(u_l)\Delta u_l}{f(u_l)f(u_{l+1})}\geqslant\frac{\alpha}{2}\sum_{l=k_1}^{\infty}\int_l^{l+1}\frac{r'(t)}{r(t)}\mathrm{d}t=\frac{\alpha}{2}\lim_{k\to\infty}\ln\frac{r(k)}{r(k_1)}.$$

因此, $\ln r(t)<\infty$, 则有 $k\to\infty$ 时 $f(u_k)<\infty$. 注意到 f 的性质, 可知 u_k 有界. 而由 f 的单调性及(4.7.19)可知

$$\Delta u_{k_1}\geqslant\frac{\alpha}{2}f(u_{k_1+1}),$$

$$\Delta u_{k_1+1}\geqslant\frac{\alpha}{2}f(u_{k_1+2})\geqslant\frac{\alpha}{2}f(u_{k_1+1}).$$

归纳可知

$$\Delta u_k\geqslant\frac{\alpha}{2}f(u_{k_1+1}),k\geqslant k_1.$$

于是, $\lim_{k\to\infty}u_k=\infty$, 矛盾. 证毕.

定理 4.7.3　假设(4.7.16)成立, 且对 $\varepsilon>0$

$$0<\int_\varepsilon^\infty\frac{\mathrm{d}y}{f(y)},\int_{-\varepsilon}^{\infty}\frac{\mathrm{d}y}{f(y)}<\infty,\tag{4.7.20}$$

$$\sum_{l=k_0}^{\infty}\sum_{i=l+1}^{\infty} q_i = \infty, \tag{4.7.21}$$

则方程(4.7.9)振动.

证明 设$\{u_k\}$是(4.7.9)的最终正解,则有(4.7.17)成立.由f的非减性可知(4.7.17)右边第二项非负.于是

$$\frac{\Delta u_k}{f(u_{k+1})} \geqslant \sum_{l=k+1}^{\infty} q_l.$$

对上式求和

$$\sum_{l=k_0}^{k} \frac{\Delta u_l}{f(u_{l+1})} \geqslant \sum_{l=k_0}^{k}\sum_{i=l+1}^{\infty} q_i.$$

类似于引理4.7.2的证明,我们有

$$\int_{r(k_0)}^{\infty}\frac{\mathrm{d}s}{f(s)} \geqslant \int_{k_0}^{k+1}\frac{\mathrm{d}r(t)}{f(r(t))} \geqslant \sum_{l=k_0}^{k}\frac{\Delta u_l}{f(u_{l+1})} \geqslant \sum_{l=k_0}^{k}\sum_{i=l+1}^{\infty} q_i.$$

其中$r(t)=u_l+(t-l)\Delta u_l$.这是一矛盾,证毕.

定理4.7.4 假设(4.7.16)成立,$x\neq 0$时,$f'(x)\geqslant 0$,

$$0<\int_0^{\varepsilon}\frac{\mathrm{d}y}{f(y)},\int_0^{-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}y}{f(y)}<\infty,\ \varepsilon>0, \tag{4.7.22}$$

令

$$E(y)=\int_0^{y}\frac{\mathrm{d}u}{f(u)}, f'(y)F(y)\geqslant\frac{1}{c}>0, y\neq 0. \tag{4.7.23}$$

$$\sum_{l=k_0}^{\infty}[(l+1)^{\lambda}-l^{\lambda}]\sum_{i=l+1}^{\infty} q_i = \infty, \tag{4.7.24}$$

其中c是正数,$\lambda=\dfrac{1}{(c+1)}$,则方程(4.7.9)振动.

证明 注意到f的性质,则有

$$\frac{f'(y)}{f(y)} \geqslant \frac{F'(y)}{cF(y)},\ y>0.$$

积分可得

$$\left(\frac{f(y)}{f(y_0)}\right)^c \geqslant \frac{F(y)}{F(y_0)}, y \geqslant y_0 > 0.$$

因此

$$cf'(y)(f(y))^c \geqslant \frac{1}{F(y)}(f(y))^c \geqslant \frac{(f(y_0))^c}{F(y_0)}.$$

从 y_0 到 y 积分上式,

$$\left(\frac{c}{c+1}\right)((f(y))^{c+1} - (f(y_0))^{c+1}) \geqslant \frac{(f(y_0))^c}{F(y_0)}(y - y_0).$$

于是 $\lim\limits_{y\to\infty} f(y) = \infty$, $\lim\limits_{y\to\infty} f(y) = -\infty$的情形类似可证.

设(4.7.9)有解 $u_k > 0, k \geqslant k_0 - 1$. 由引理 4.7.2 知(4.7.17)成立. 令

$$r(t) = u_l + (t - l)\Delta u_l, l \leqslant t \leqslant l + 1.$$

$$\varphi(t) = t^{\lambda-1}\int_0^{r(t)} \frac{dy}{f(y)}, l \leqslant t \leqslant l + 1.$$

类似引理 4.7.2 的证明

$$\frac{1}{k}\sum_{l=k_1}^{k-1} \frac{\Delta u_l}{f(u_{l+1})} \leqslant \frac{1}{k}\int_{r(k_1)}^{r(k)} \frac{dy}{f(y)} \leqslant \frac{1}{k}\sum_{l=k_1}^{k-1} \frac{\Delta u_l}{f(u_l)}. \quad (4.7.25)$$

由(4.7.17)可知

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{l=k_1}^{k-1} \frac{\Delta u_l}{f(u_{l+1})} = 0. \quad (4.7.26)$$

于是

$$\sum_{l=k}^{\infty} \frac{\Delta f(u_l)\Delta u_l}{f(u_{l+1})f(u_{l+1})} = \sum_{l=k}^{\infty}\left(\frac{\Delta u_l}{f(u_l)} - \frac{\Delta u_l}{f(u_{l+1})}\right) < \infty.$$

可知

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\Delta u_k}{f(u_k)} = \lim_{k\to\infty} \frac{\Delta u_k}{f(u_{k+1})} = 0.$$

则有

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{l=k_1}^{k-1} \frac{\Delta u_l}{f(u_l)} = 0. \quad (4.7.27)$$

比较(4.7.25)(4.7.26)和(4.7.27)，则有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\varphi(k)}{k^{\lambda}}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\int_0^{r(k)}\frac{\mathrm{d}y}{f(y)}=0. \tag{4.7.28}$$

下面证

$$\int_t^{\infty}\frac{\varphi(s)}{s^{\lambda-1}}\mathrm{d}s<\infty,\ t\geqslant k_1. \tag{4.7.29}$$

由 r 和 φ 的定义,可知

$$\frac{r'(t)}{f(r(t))}=t^{1-\lambda}\varphi'(t)+(1-\lambda)t^{-\lambda}\varphi(t),l\leqslant t\leqslant l+1, \tag{4.7.30}$$

于是

$$\begin{aligned}&\frac{f'(r(t))(r'(t))^2}{f^2(r(t))}\\ &\geqslant\frac{1}{c}\left[t^{1-\lambda}\frac{\varphi'^2(t)}{\varphi(t)}+2(1-\lambda)t^{-\lambda}\varphi'(t)+(1-\lambda)^2t^{-\lambda-1}\varphi(t)\right]\\ &=\frac{t^{1-\lambda}\varphi'^2(t)}{c\varphi(t)}+2\lambda t^{-\lambda}\varphi'(t)+\lambda(1-\lambda)t^{-\lambda-1}\varphi(t).\end{aligned} \tag{4.7.31}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\int_{k_1}^{\infty}\frac{f'(r(s))(r'(s))^2}{f^2(r(s))}\mathrm{d}s&=\sum_{l=k_1}^{\infty}\int_l^{l+1}\frac{f'(r(s))(r'(s))^2}{f^2(r(s))}\mathrm{d}s\\ &=\sum_{l=k_1}^{\infty}\int_l^{l+1}\frac{f'(r(s))(r'(s))}{f^2(r(s))}\mathrm{d}s\Delta u_l\\ &=\sum_{l=k_1}^{\infty}\left[\frac{1}{f(u_l)}-\frac{1}{f(u_{l+1})}\right]\Delta u_l\\ &=\sum_{l=k_1}^{\infty}\frac{\Delta f(u_l)\Delta u_l}{f(u_l)f(u_{l+1})}<\infty.\end{aligned} \tag{4.7.32}$$

比较(4.7.31)和(4.7.32)可知

$$\int_{k_1}^{\infty}s^{-\lambda}\varphi'(s)\mathrm{d}s<\infty. \tag{4.7.33}$$

由(4.7.28)和(4.7.33)有

$$\int_{k_1}^{\infty}\frac{\varphi(s)}{s^{\lambda+1}}\mathrm{d}s<\infty. \tag{4.7.34}$$

定义 $w(t)=\varphi(t)-(1+\lambda)t^{\lambda}\int_t^{\infty}\frac{\varphi(s)}{s^{\lambda+1}}\mathrm{d}s, k\leqslant t\leqslant k+1$,则有,

$$\begin{aligned}
w'(t)=&\ \varphi'(t)-(1+\lambda)\lambda t^{\lambda-1}\int_t^{\infty}\frac{\varphi(s)}{s^{\lambda+1}}\mathrm{d}s+(1+\lambda)t^{\lambda}\frac{\varphi(t)}{t^{\lambda+1}}\\
=&\ t^{\lambda-1}\frac{r'(t)}{f(r(t))}+(\lambda-1)t^{\lambda-2}\int_0^{r(t)}\frac{\mathrm{d}y}{f(y)}\\
&-(1+\lambda)\lambda t^{\lambda-1}\int_t^{\infty}\frac{\varphi(s)}{s^{\lambda+1}}+(1+\lambda)\left(\frac{\varphi(t)}{t}\right)\\
=&\ t^{\lambda-1}\frac{r'(t)}{f(r(t))}+2\lambda\frac{\varphi(t)}{t}-\lambda(1+\lambda)t^{\lambda-1}\int_t^{\infty}\frac{\varphi(s)}{s^{\lambda+1}}\mathrm{d}s\\
\geqslant&\ t^{\lambda-1}\frac{\Delta u_k}{f(u_{k+1})}+2\lambda\frac{\varphi(t)}{t}-\lambda(1+\lambda)t^{\lambda-1}\int_t^{\infty}\frac{\varphi(s)}{s^{\lambda+1}}\\
=&\ t^{\lambda-1}\left(\sum_{l=k+1}^{\infty}q_l+\sum_{l=k+1}^{\infty}\frac{\Delta f(u_l)\Delta u_l}{f(u_l)f(u_{l+1})}\right)\\
&+2\lambda\frac{\varphi(t)}{t}-\lambda(1+\lambda)t^{\lambda-1}\int_t^{\infty}\frac{\varphi(s)}{s^{\lambda+1}}\mathrm{d}s\\
=&\ t^{\lambda+1}\sum_{l=k+1}^{\infty}q_l-t^{\lambda-1}\frac{\Delta f(u_k)\Delta u_k}{f(u_k)f(u_{k+1})}\\
&+t^{\lambda-1}\int_k^{\infty}\frac{f'(r(s))(r'(s))^2}{f^2(r(s))}\mathrm{d}s+2\lambda\frac{\varphi(t)}{t}\\
&-\lambda(1+\lambda)t^{\lambda-1}\int_t^{\infty}\frac{\varphi(s)}{s^{\lambda+1}}\mathrm{d}s\\
\geqslant&\ t^{\lambda-1}\sum_{l=k+1}^{\infty}q_l-t^{\lambda-1}\frac{\Delta f(u_k)\Delta u_k}{f(u_k)f(u_{k+1})}t^{\lambda-1}\int_t^{\infty}\frac{f'(r(s))(r'(s))^2}{f^2(r(s))}\mathrm{d}s\\
&+2\lambda\frac{\varphi(t)}{t}-\lambda(1+\lambda)t^{\lambda-1}\int_t^{\infty}\frac{\varphi(t)}{s^{\lambda+1}}\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geqslant t^{\lambda-1}\sum_{l=k+1}^{\infty}q_l - t^{\lambda-1}\frac{\Delta f(u_k)\Delta u_k}{\Delta f(u_k)\Delta(u_{k+1})} \\
&\quad + t^{\lambda-1}\int_t^{\infty}\left[\frac{s^{1-\lambda}(\varphi'(s))^2}{c\varphi(s)} + 2\lambda s^{-\lambda}\varphi'(s) + \lambda(1-\lambda)s^{-\lambda-1}\varphi(s)\right]\mathrm{d}s \\
&\quad + 2\lambda\frac{2\varphi(t)}{t} - \lambda(1-\lambda)t^{\lambda-1}\int_t^{\infty}\frac{\varphi(s)}{s^{\lambda+1}}\mathrm{d}s \\
&= t^{\lambda-1}\sum_{l=k+1}^{\infty}q_l - t^{\lambda-1}\frac{\Delta f(u_k)\Delta u_k}{f(u_k)f(u_{k+1})} + t^{\lambda-1}\int_t^{\infty}\frac{s^{1-\lambda}(\varphi'(s))^2}{c\varphi(s)}\mathrm{d}s \\
&\quad + 2\lambda t^{\lambda-1}\left[-\frac{\varphi(t)}{t^{\lambda}} + \lambda\int_t^{\infty}\frac{\varphi(s)}{s^{\lambda+1}}\mathrm{d}s\right] + t^{\lambda+1}\lambda(1-\lambda)\int_t^{\infty}\frac{\varphi(s)}{s^{\lambda+1}}\mathrm{d}s \\
&\quad + 2\lambda\frac{\varphi(t)}{t} - \lambda(1+\lambda)t^{\lambda-1}\int_t^{\infty}\frac{\varphi(s)}{s^{\lambda+1}}\mathrm{d}s \\
&= t^{\lambda-1}\sum_{l=k+1}^{\infty}q_l - t^{\lambda-1}\frac{\Delta f(u_k)\Delta u_k}{f(u_k)f(u_{k+1})} + t^{\lambda-1}\int_t^{\infty}\frac{s^{1-\lambda}(\varphi'(s))^2}{c\varphi(s)}\mathrm{d}s \\
&\geqslant t^{\lambda-1}\sum_{l=k+1}^{\infty}q_l - t^{\lambda-1}\frac{\Delta f(u_k)\Delta u_k}{f(u_k)f(u_{k+1})}.
\end{aligned}
\tag{4.7.35}
$$

注意到$(k+1)^{\lambda}-k^{\lambda}$ 对所有大k 是单减有界的，于是

$$
\begin{aligned}
&\sum_{l=k_0}^{k}\int_l^{l+1}s^{\lambda-1}\frac{\Delta f(u_l)\Delta u_l}{f(u_l)f(u_{l-1})}\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{\lambda}\sum_{l=k_0}^{k}[(l+1)^{\lambda}-l^{\lambda}]\frac{\Delta f(u_l)\Delta u_l}{f(u_l)f(u_{l+1})} \\
&\leqslant M\sum_{l=k_0}^{k}\frac{\Delta f(u_l)\Delta u_l}{f(u_l)f(u_{l+1})} < \infty,\ k\to\infty,
\end{aligned}
\tag{4.7.36}
$$

其中M是正数.另一方面

$$
\int_k^{k+1}s^{\lambda-1}\sum_{l=k+1}^{\infty}q_l\mathrm{d}s = \frac{1}{\lambda}[(k+1)^{\lambda}-k^{\lambda}]\sum_{l=k+1}^{\infty}q_l.
$$

由(4.7.24)可知

$$\sum_{j=k_0}^{k+1}\int_j^{j+1}s^{\lambda-1}\sum_{l=j+1}^{\infty}q_l\mathrm{d}s = \frac{1}{\lambda}\sum_{j=k_0}^{k}[(j+1)^\lambda - j^\lambda]\sum_{i=j+1}^{\infty}q_i \to \infty, k\to\infty. \tag{4.7.37}$$

比较(4.7.35),(4.7.36)和(4.7.37),则有 $\lim_{k\to\infty}w(k)=\infty$ 且 $\lim_{t\to\infty}\varphi(t)=\infty$. 令 $k_n=\sup\{k:\varphi(k)\leqslant n\}$. 显然, $\lim_{n\to\infty}k_n=\infty$. 对于 $k\geqslant k_n$, $\varphi(k)\geqslant n\geqslant\varphi(k_n)$是成立的. 因此

$$\begin{aligned}
w(k_n) &= \varphi(k_n) - (1+\lambda)k_n^\lambda\int_{k_n}^{\infty}\frac{\varphi(s)}{s^{\lambda+1}}\mathrm{d}s \\
&\leqslant \varphi(k_n) - (1+\lambda)k_n^\lambda\varphi(k_n)\int_{k_n}^{\infty}\frac{1}{s^{\lambda+1}}\mathrm{d}s \\
&= \varphi(k_n)\left[1-(1+\lambda)k_n^\lambda\frac{k_n^{-\lambda}}{\lambda}\right] \\
&= -\frac{1}{\lambda}\varphi(k_n) < 0.
\end{aligned}$$

矛盾. 证毕.

§4.8 二阶差分方程的单调解

考虑方程

$$\Delta(p_{n-1}\Delta x_{n-1}) + q_n f(x_n) = 0. \quad n=1,2,\cdots, \tag{4.8.1}$$

其中 $p_n>0$, $\{q_n\}$是实数列, $f\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$是非减的, 且满足 $xf(x)>0$ $(x\neq0)$. 先看一个引理.

引理 4.8.1 设 $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$是一个实数列, 且当 $i\leqslant k\leqslant j+1$ 时 $x_k>0$. 那么

$$\sum_{k=i}^{j}\frac{\Delta x_k}{f(x_k)} \geqslant \int_{x_i}^{x_{j+1}}\frac{\mathrm{d}u}{f(u)} \geqslant \sum_{k=i}^{j}\frac{\Delta x_k}{f(x_{k+1})}.$$

证明 对 i,j 之间固定的 k, 令,

$$g(t)=x_k+(t-k)\Delta x_k,\ k\leqslant t\leqslant k+1,$$

则有

$$g'(t)=\Delta x_k,\quad \frac{\Delta x_k}{f(x_k)}\geqslant\frac{g'(t)}{f(g(t))}\geqslant\frac{\Delta x_k}{f(x_{k+1})},k<t<k+1.$$

于是

$$\frac{\Delta x_k}{f(x_k)}\geqslant\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}g'(t)}{f(g(t))}=\int_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{\mathrm{d}u}{f(u)}\geqslant\frac{\Delta x_k}{f(x_{k+1})},$$

即有

$$\sum_{k=i}^{j}\frac{\Delta x_k}{f(x_k)}\geqslant\sum_{k=i}^{j}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\frac{\mathrm{d}u}{f(u)}\geqslant\sum_{k=i}^{j}\frac{\Delta x_k}{f(x_{k+1})}.$$

证毕.

设有 N 使得 $n\geqslant N$ 时, $x_n>0$ 是(4.8.1)的一个解,由(4.8.1)知

$$\frac{\Delta(p_{n-1}\Delta x_{n-1})}{f(x_n)}+q_n=0,\quad n\geqslant N+1.$$

从 $N+1$ 到 k 对上式求和则有

$$\frac{p_k\Delta x_k}{f(x_k)}-\sum_{n=N+1}^{k-1}p_n\Delta x_n\Delta\left\{\frac{1}{f(x_n)}\right\}-\frac{p_N\Delta x_N}{f(x_{N+1})}+\sum_{n=N+1}^{k}q_n=0.$$

由 f 的非减性可知

$$\Delta x_n\Delta\left\{\frac{1}{f(x_n)}\right\}\leqslant 0,\quad n\geqslant N+1.$$

于是

$$\frac{p_k\Delta x_k}{f(x_k)}\leqslant\frac{p_N\Delta x_N}{f(x_{N+1})}-\sum_{n=N+1}^{k}q_n \tag{4.8.2}$$

或者

$$\frac{\Delta x_k}{f(x_k)}\leqslant\frac{p_N\Delta x_N}{p_kf(x_{N+1})}-\sum_{n=N+1}^{k}\frac{q_n}{p_k}.$$

求和并利用引理 4.8.1 可知

$$\int_{x_j}^{x_{m+1}}\frac{\mathrm{d}u}{f(u)}\leqslant\frac{p_N\Delta x_N}{f(x_{N+1})}\sum_{k=j}^{m}\frac{1}{p_k}-\sum_{k=j}^{m}\sum_{n=N+1}^{k}\frac{q_n}{p_k}. \tag{4.8.3}$$

定理 4.8.1 假设

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}=\infty, \tag{4.8.4}$$

$$\lim_{m\to\infty}\inf\sum_{n=k}^{m}q_n>0 \tag{4.8.5}$$

对所有大 k 成立. 则方程(4.8.1)的最终正解是最终单增的.

证明 不妨设 $n\geqslant N$ 时 $x_n>0$. 如果结论不成立, 不失一般性可设 $\Delta x_N\leqslant 0$. 由(4.8.5)和(4.8.2)可知 $n\geqslant N$ 时, $\Delta x_n<0$. 这样, 可由(4.8.2)和(4.8.5)知有 T 使得

$$p_T\Delta x_T\leqslant\left\{\frac{p_N\Delta x_n}{f(x_{N+1})}-Q_T\right\}f(x_T),$$

其中

$$Q_k=\sum_{n=N+1}^{k}q_n>0,\quad k\geqslant T.$$

由(4.8.1)可知

$$p_k\Delta x_k-p_T\Delta x_T+\sum_{n=T+1}^{k}q_nf(x_n)=0.$$

于是

$$\begin{aligned}p_k\Delta x_k&=p_T\Delta x_T-\sum_{n=T+1}^{k}q_nf(x_n)=p_T\Delta x_T-\sum_{n=T+1}^{k}f(x_n)\Delta Q_{n-1}\\&\leqslant\left\{\frac{p_N\Delta x_N}{f(x_{N+1})}-Q_T\right\}f(x_T)\\&\quad-\left\{f(x_k)Q_k-\sum_{n=T+1}^{k-1}Q_n\Delta f(x_n)-f(x_{T+1})Q_T\right\}\\&\leqslant\left\{\frac{p_N\Delta x_n}{f(x_{N+1})}f(x_T)+Q_T\Delta f(x_T)+\sum_{n=N+1}^{k-1}Q_n\Delta f(x_n)\right\}\\&\leqslant\frac{p_N\Delta x_N}{f(x_{N+1})}f(x_T).\end{aligned}$$

两边同除以 p_k 并求和, 则有

$$x_{m+1}-x_{T+1}\leqslant\frac{p_N\Delta x_N}{f(x_{N+1})}f(x_T)\sum_{n=T+1}^{m}\frac{1}{p_n}.$$

由(4.8.4)可知 $\lim\limits_{m\to\infty}x_m=-\infty$. 这是一个矛盾，证毕.

定理 4.8.2 设有 M 使得对 $T\geqslant M$ 有 $j\geqslant T$ 满足

$$\lim_{m\to\infty}\sup\sum_{k=j}^{m}\sum_{n=T+1}^{k}\frac{q_n}{p_k}=\infty. \tag{4.8.6}$$

则(4.8.1)的最终正解最终单增，或满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\inf x_n=0$.

证明 设 $n\geqslant N$ 时，$x>0$，

$$\lim_{m\to\infty}\sup\sum_{k=j}^{m}\sum_{n=N+1}^{k}\frac{q_n}{p_k}=\infty,\quad j>N,$$

且 $\Delta x_n\leqslant0$. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\inf x_n\neq0$，则有 $\alpha>0$ 及 $T\geqslant N$ 使得 $m\geqslant T$ 时 $x_{m+1}\geqslant\alpha$. 由(4.8.3)可知，

$$\int_{x_j}^{\alpha}\frac{\mathrm{d}u}{f(u)}\leqslant\int_{x_j}^{x_{m+1}}\frac{\mathrm{d}u}{f(u)}\leqslant-\sum_{k=j}^{m}\sum_{n=T+1}^{k}\frac{q_n}{p_k}.$$

这与(4.8.6)矛盾. 证毕.

定理 4.8.2 的证明过程显知如下结果.

推论 4.8.1 定理 4.8.2 的条件成立，且

$$\int_0^{\varepsilon}\frac{\mathrm{d}u}{f(u)}<\infty. \tag{4.8.7}$$

则方程(4.8.1)的最终正解是最终单增的.

定理 4.8.3 假设

$$\lim_{k\to\infty}\inf\frac{1}{p_k}\sum_{n=T+1}^{k}q_n>0, \tag{4.8.8}$$

对所有的大 T 成立，则方程(4.8.1)的最终正解 $\{x_n\}$ 或最终单增或最终单减并满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

证明 设有 N，使得 $n\geqslant N$ 时 $x_n>0$，

$$\lim_{k\to\infty}\inf\frac{1}{p_k}\sum_{n=N+1}^{k}q_n>0,$$

且 $\Delta x_N \leqslant 0$. 不失一般性, 可设

$$\frac{1}{p_k}\sum_{n=N+1}^{k} q_n \geqslant \alpha > 0, \quad k \geqslant N.$$

由(4.8.2)知

$$\Delta x_k \leqslant -f(x_k)\sum_{n=N+1}^{k}\frac{q_n}{p_k} \leqslant -\alpha f(x_k) < 0, n \geqslant N.$$

如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq 0$, 则有 $\beta > 0$ 使得 $x_n \geqslant \beta$ 最终成立. 不妨设 $n \geqslant N$ 时 $x_n \geqslant \beta$. 对上式求和, 则有

$$\beta \leqslant x_{m+1} \leqslant x_T - (m+1-N)\alpha f(\beta) \to -\infty.$$

矛盾, 证毕.

定理 4.8.4　(4.8.4)成立, 且有 M 使得对每一 $T \geqslant M$, 有 $j > T$ 使得

$$\limsup_{m\to\infty}\sum_{k=j}^{m}\sum_{n=T+1}^{k}\frac{q_n}{p_k} > 0, \tag{4.8.9}$$

则(4.8.1)的最终正解 $\{x_n\}$ 最终单增或满足 $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

证明　设有 N 使得 $n \geqslant N$ 时 $x_n > 0$,

$$\limsup_{m\to\infty}\sum_{k=j}^{m}\sum_{n=N+1}^{k}\frac{q_n}{p_k} > 0, \quad 某一 j > N,$$

且 $\Delta x_N \leqslant 0$. 由(4.8.2) 知有 $T \geqslant N$ 使得 $\Delta x_T < 0$. 如果有 $\alpha > 0$ 使得 $n \geqslant T$ 时 $x_n > \alpha > 0$, 由(4.8.3)可知

$$\int_{x_j}^{\alpha}\frac{du}{f(u)} \leqslant \int_{x_j}^{x_{m+1}}\frac{du}{f(u)}$$

$$\leqslant \frac{p_T\Delta x_T}{f(x_{T+1})}\sum_{k=j}^{m}\frac{1}{p_k} - \sum_{k=j}^{m}\sum_{n=N+1}^{k}\frac{q_n}{p_k}.$$

由(4.8.4)知矛盾, 证毕.

接下来我们给出最终正单调解的必要条件. 如果(4.8.1)有一个最终单增正解 $\{x_n\}$, 由(4.8.2)可见, 如果

$$\limsup_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} q_k = \infty,$$

将导致矛盾.

定理 4.8.5 如果

$$\limsup_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} q_k = \infty, \tag{4.8.10}$$

则(4.8.1)无最终单增正解.

设$\{x_n\}$满足 $n\geqslant N$ 时,$x_n>0,\Delta x_n>0,\varphi=\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$是一非负数列,用$\frac{\varphi_n}{p_nf(x_n)}$乘 (4.8.1)并从 $N+1$ 到 k 求和,则有

$$\sum_{n=N+1}^{k}\frac{\varphi_n}{p_nf(x_n)}\Delta(p_{n-1}\Delta x_{n-1})+\sum_{n=N+1}^{k}\frac{\varphi_nq_n}{p_n}=0.$$

即

$$\begin{aligned}&\frac{\varphi_{k+1}}{p_{k+1}f(x_{k+1})}p_k\Delta x_k-\frac{\varphi_{N+1}}{p_{N+1}f(x_{N+1})}p_N\Delta x_N\\&-\sum_{n=N+1}^{k}p_n\Delta x_n\Delta\left\{\frac{\varphi_n}{p_nf(y_n)}\right\}+\sum_{n=N+1}^{k}\frac{\varphi_nq_n}{p_n}=0.\end{aligned}\tag{4.8.11}$$

如果假设$\{p_n\}$非减,那么

$$\Delta\left\{\frac{\varphi_n}{p_nf(x_n)}\right\}=\left\{\frac{\varphi_{n+1}}{p_{n+1}f(x_{n+1})}-\frac{\varphi_n}{p_nf(x_n)}\right\}\leqslant\frac{\Delta\varphi_n}{p_{n+1}f(x_{n+1})},$$

$$p_n\Delta x_n\Delta\left\{\frac{\varphi_n}{p_nf(x_n)}\right\}\leqslant p_n\Delta x_n\left\{\frac{\Delta\varphi_n}{p_{n+1}f(x_{n+1})}\right\}\leqslant\frac{\Delta x_n\Delta\varphi_n}{f(x_{n+1})},$$

因此,由(4.8.11)有

$$\begin{aligned}&\frac{\varphi_{k+1}p_k\Delta x_k}{p_{k+1}f(x_{k+1})}-\frac{\varphi_{N+1}p_N\Delta x_N}{p_{N+1}f(x_{N+1})}+\sum_{n=N+1}^{k}\frac{\varphi_nq_n}{p_n}\\&\qquad\leqslant\sum_{n=N+1}^{k}\frac{\Delta x_n\Delta\varphi_n}{f(x_{n+1})}.\end{aligned}\tag{4.8.12}$$

定理 4.8.6 $\{p_n\}$非减,且有非负非增数列 φ_n 使得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n q_n}{p_n}=+\infty, \tag{4.8.13}$$

则(4.8.1)无最终单增正解.

定理 4.8.7　$\{p_n\}$非减,且有非负数列 φ_n 满足$\{\Delta\varphi_n\}$有界,(4.8.13)成立,且

$$0<\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\mathrm{d}u}{f(u)}<\infty,\varepsilon>0, \tag{4.8.14}$$

则(4.8.1)无最终单增正解.

证明　设有 N 使得 $x_n>0$, $\Delta x_n>0$ 是(4.8.1)的解,由引理 4.8.1,我们有

$$\sum_{n=N+1}^{k}\frac{\Delta x_n}{f(x_{n+1})}\leqslant\int_{x_{N+1}}^{x_{k+1}}\frac{\mathrm{d}u}{f(u)}. \tag{4.8.15}$$

由(4.8.14)及$\{\Delta\varphi_n\}$的有界性

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{\Delta x_n\Delta\varphi_n}{f(x_{n+1})}\leqslant M\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{\Delta x_n}{f(x_{n+1})}$$

$$\leqslant M\int_{N+1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}u}{f(u)}<\infty. \tag{4.8.16}$$

这说明(4.8.12)左边有上界,矛盾于(4.8.13),证毕.

注意到在定理 4.8.7 的证明中,如果 x_n 有界(4.8.16),

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{\Delta x_n\Delta\varphi_n}{f(x_{n+1})}\leqslant M\int_{0}^{\theta}\frac{\mathrm{d}u}{f(u)}.$$

定理 4.8.8　$\{p_n\}$非减且有非负数列 φ_n 使得$\{\Delta\varphi_n\}$有界,(4.8.13)成立,

$$0<\int_{0}^{\varepsilon}\frac{\mathrm{d}u}{f(u)}<\infty,$$

则(4.8.1)无最终有界非减正解.

定理 4.8.9　设有非负非退化数列 φ_n 满足

$$\lim_{m\to\infty}\sup\frac{\displaystyle\sum_{k=T}^{m}\sum_{n=T}^{k}\frac{\varphi_{k+1}q_n}{p_k}}{\displaystyle\sum_{k=T}^{m}\frac{\varphi_{k+1}}{p_k}}=\infty, \tag{4.8.17}$$

对所有大 T 成立,则方程(4.8.1)无最终非负正解.

证明 $n\geqslant N$ 时 $x_n>0,\Delta x_n\geqslant 0$ 对(4.8.2)乘 φ_{k+1}有

$$\frac{\varphi_{k+1}\Delta x_k}{f(x_k)}+\sum_{n=N+1}^{k}\frac{\varphi_{k+1}q_n}{p_k}\leqslant\frac{\varphi_{k+1}p_n\Delta x_N}{f(x_{N+1})p_k}.$$

因此

$$\sum_{k=N+1}^{m}\sum_{n=N+1}^{k}\frac{\varphi_{k+1}q_n}{p_k}\leqslant\frac{p_N\Delta x_N}{f(x_{N+1})}\sum_{k=N+1}^{m}\frac{\varphi_{k+1}}{p_k}.$$

这与(4.8.17)矛盾,证毕.

定理 4.8.10 假设(4.8.14)成立,且

$$\sum_{k+1}^{\infty}q_n<\infty, \tag{4.8.18}$$

$$\lim_{m\to\infty}\sup\sum_{n=T}^{m}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{q_k}{p_n}=\infty, \tag{4.8.19}$$

对所有大 T 成立,则(4.8.1)无最终正的非减解.

证明 由(4.8.2)和(4.8.18)有

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}q_n\leqslant\frac{p_N\Delta x_N}{f(x_{N+1})}.$$

由(4.8.15)可知

$$\sum_{N=T}^{m}\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{q_n}{p_N}\leqslant\sum_{N=T}^{m}\frac{\Delta x_N}{f(x_{N+1})}\leqslant\int_{x_T}^{x_{m+1}}\frac{\mathrm{d}u}{f(u)}.$$

由(4.8.19)和(4.8.14)可知矛盾,证毕.

类似地,可有如下定理

定理 4.8.11 (4.8.18)和(4.8.19)成立,且

$$0<\int_0^{\varepsilon}\frac{\mathrm{d}u}{f(u)}<\infty,\quad \varepsilon>0,$$

则(4.8.1)无有最终非减正解

§4.9 含有阻尼的差分方程

先考虑带有阻尼项的差分方程

$$\Delta(a_n\Delta y_n) + p_n\Delta y_n + q_n f(y_n) = 0, n = 1,2,\cdots, \quad (4.9.1)$$

其中

(c_1) $a_n>0, p_n\geqslant 0, n\geqslant n_0$,

(c_2) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}; u\neq 0, uf(u)>0$.

定理 4.9.1 假设

(i) 是上的连续非减函数,

(ii) $a_n - p_n\geqslant 0,\ n\geqslant n_0$, (4.9.2)

(iii) 存在正数列$\{b_n\}$满足

$$\Delta b_n \leqslant 0,\ \Delta(p_n b_n) \leqslant 0, \Delta(a_{n+1}\Delta b_n) \geqslant 0, n \geqslant n_0, \quad (4.9.3)$$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n q_n = \infty, \quad (4.9.4)$$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{a_n b_n}\sum_{s=n_0}^{n-1} b_s q_s = \infty, \quad (4.9.5)$$

则(4.9.1)的每一解$\{x_n\}$振动或单调且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

证明 设 $n\geqslant n_0$ 时 $y_n>0$ 是(4.9.1)的解,考虑$\{\Delta y_n\}$振动,最终正或负等三种情况 .

如果$\{\Delta y_n\}$是振动的,设有 $n_1\geqslant n_0$ 使 $\Delta y_{n_1}<0$. 由(4.9.1)有

$$\Delta(a_{n_1}\Delta y_{n_1})\Delta y_{n_1} = -p_{n_1}(\Delta y_{n_1})^2 - q_{n_1}f(y_{n_1})\Delta y_{n_1}$$
$$> -p_{n_1}(\Delta y_{n_1})^2.$$

因此

$$\Delta y_{n_1}(a_{n_1+1}\Delta y_{n_1-1} - a_{n_1}\Delta y_{n_1}) > -p_{n_1}(\Delta y_{n_1})^2$$

或

$$a_{n_1+1}\Delta y_{n_1+1}\Delta y_{n_1} > (a_{n_1} - p_{n_1})(\Delta y_{n_1})^2 \geqslant 0.$$

于是

$$\Delta y_{n_1+1} < 0.$$

归纳可知，$n\geqslant n_1$ 时 $\Delta y_n<0$. 因此，$n\geqslant n_0$ 时 $\Delta y_n\geqslant 0$.

如果有 $n_1\geqslant n_0$ 使得 $\Delta y_{n_1}=0$，由(4.9.1)可知 $\Delta y_{n_1+1}<0$.

如果有 $n_1\geqslant n_0$ 使得 $n\geqslant n_1$ 时 $\Delta y_n>0$，定义

$$z_n = \frac{b_n a_n \Delta y_n}{f(y_n)} > 0, \quad n \geqslant n_1,$$

则有

$$\Delta z_n = - b_n q_n - \frac{p_n b_n \Delta y_n}{f(y_n)} + \frac{\Delta b_n a_{n+1}\Delta y_{n+1}}{f(y_{n+1})} - \frac{b_n a_{n+1}\Delta y_{n+1}\Delta f(y_n)}{f(y_n)g(y_{n+1})}. \tag{4.9.6}$$

由假设可知

$$\Delta z_n \leqslant - b_n q_n, \quad n \geqslant n_1.$$

于是

$$\sum_{s=n_1}^{s} b_s q_s \leqslant z_{n_1} - z_{n+1} \leqslant z_{n_1}.$$

这与(4.9.4)矛盾．

如果有 n_1 使得 $n\geqslant n_1$ 时，$\Delta y_n\leqslant 0$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b\geqslant 0$. 不妨设 $b>0$，令 $u_n = b_n a_n \Delta y_n$ 则

$$\Delta u_n = - b_n p_n \Delta y_n - b_n q_n f(y_n) + (\Delta b_n)(a_{n+1}\Delta y_{n+1}). \tag{4.9.7}$$

因此

$$u_n = u_{n_1} - \sum_{s=n_1}^{n-1} b_s q_s f(y_s) - \sum_{s=n_1}^{n-1} p_s b_s \Delta y_s + \sum_{s=n_1}^{n-1} (\Delta b_s) + (a_{s+1}\Delta y_{s+1})$$

$$= u_{n_1} - \sum_{s=n_1}^{n-1} p_s b_s \Delta y_s - f(y_s)\sum_{s=n_1}^{n-1} b_s p_s + \sum_{s=n_1}^{n-1}(\Delta f(y_s))\Big(\sum_{t=n_1}^{s} b_t q_t\Big)$$

$$+ \sum_{s=n_1}^{n-1}(\Delta b_s)(a_{s+1}\Delta y_{s+1})$$

$$\leqslant u_{n_1} + p_{n_1} b_{n_1} y_{n_1} - f(y_n)\sum_{s=n_1}^{n-1} b_s q_s - a_{n_1+1}(\Delta b_{n_1}) y_{n_1+1}$$

$$\leqslant M - f(b)\sum_{s=n_1}^{n-1} b_s q_s,$$

$$M = u_{n_1} + p_{n_1} b_{n_1} y_{n_1} - a_{n_1+1}(\Delta b_{n_1}) y_{n_1+1}.$$

由(4.9.4)知,有 $n_2 \geqslant n_1$ 使得

$$u_n \leqslant -\frac{f(b)}{2}\sum_{s=n_1}^{n-1} b_s q_s, \quad n \geqslant n_2.$$

从而

$$\sum_{s=n_2}^{n-1}\Delta y_n \leqslant -\frac{f(b)}{2}\sum_{s=n_2}^{n-1}\frac{1}{a_s b_s}\Big(\sum_{t=n_1}^{s-1} b_t q_t\Big).$$

由条件(4.9.5)可知 $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = -\infty$. 矛盾. 证毕.

定理 4.9.2 定理 4.9.1 中(i)和(ii),及(4.9.4),(4.9.5)成立,且有正数列 $\{b_n\}$,使得

$$\Delta b_n \geqslant 0, \Delta(p_n b_n) \leqslant 0, \Delta(a_n \Delta b_n) \leqslant 0, n \geqslant n_0, \tag{4.9.8}$$

$$\int^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{f(u)} < \infty, \tag{4.9.9}$$

则定理 4.9.1 的结论成立.

证明 设 $n \geqslant n_0$ 时 $y_n > 0$ 是(4.9.1)的解. 同定理 4.9.1 一样,我们考虑三种情况. 如果 $\{\Delta y_n\}$ 振动,证明同定理 4.9.1,如果 $n \geqslant n_0$ 时 $\Delta y_n > 0$, z_n 按定理 4.9.1 定义,这时由(4.9.6)和(4.9.8)有

$$\Delta z_n \leqslant -b_n q_n + \frac{(\Delta b_n) a_{n+1}\Delta y_{n+1}}{f(y_{n+1})}, \quad n \geqslant n_1.$$

注意到 $a_n\Delta y_n$ 和 $a_n\Delta b_n$ 的性质,则有

$$\Delta z_n \leqslant - b_n q_n + a_{n_1}\Delta b_{n_1}\frac{\Delta y_n}{f(y_{n+1})}, n \geqslant n_1. \qquad (4.9.10)$$

设 $y_n \leqslant x \leqslant y_{n+1}$，则有

$$\frac{1}{f(x)} \geqslant \frac{1}{f(y_{n+1})}, \int_{y_n}^{y_{n+1}}\frac{dx}{f(x)} \geqslant \frac{\Delta y_n}{f(y_{n+1})}.$$

由(4.9.10)可知

$$\sum_{s=n_1}^{n} b_s q_s \leqslant z_{n_1} - z_{n+1} + a_{n_1}\Delta b_{n_1}\int_{y_{n_1}}^{y_{n+1}}\frac{dx}{f(x)}.$$

由(4.9.9)和(4.9.4)可见矛盾.

如果 $n \geqslant n_0$ 时 $\Delta y_n < 0$，u_n 按定理 4.9.1 定义,这时有

$$\Delta u_n \leqslant - b_n p_n \Delta y_n - b_n q_n f(y_n), n \geqslant n_1.$$

其余类似定理 4.9.1,省略．证毕．

例 4.9.1 考虑差分方程

$$\Delta(n^2\Delta y_n) + \frac{3}{n}\Delta y_n + \frac{n(n^2+3n+6)}{(n+1)(n+2)}y_n^3 = 0.$$

$b_n = 1$ 时,它满足定理 4.9.2 的条件,它有一个解 $y_n = \frac{1}{n}$.

例 4.9.2 方程

$$\Delta(n^2\Delta y_n) + \frac{1}{n+2}\Delta y_n + \frac{n(n^3+3n+1)}{(n+1)(n+2)}y_n = 0$$

满足定理 4.9.1 的条件($b_n = 1$),它有解 $y_n = \frac{1}{n}$.

当方程(4.9.1)中的 f 变成线性函数的时候，例如 $f(v) = \alpha v$, $\alpha > 0$.我们有如下结果．

定理 4.9.3 假设(4.9.2)和(4.9.5)成立,且

$$f(v) = \alpha v,\ \alpha > 0, \qquad (4.9.11)$$

存在正数列 $\{b_n\}$ 使得

$$\Delta b_n \geqslant 0, \Delta(b_n p_n) \leqslant 0, n \geqslant n_0, \qquad (4.9.12)$$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}\left(b_nq_n - \frac{a_n(\Delta b_n)^2}{4\alpha b_n}\right) = \infty, \qquad (4.9.13)$$

则定理 4.9.1 的结论成立．

证明　类似定理 4.9.1 的证明可知$\{\Delta y_n\}$是非振动的．当 $\Delta y_n > 0$ 时，z_n 同定理 4.9.1 一样，这时有

$$\begin{aligned}\Delta z_n &\leqslant - b_nq_n + \frac{\Delta b_n}{b_{n+1}}z_{n+1} - \frac{\alpha b_n}{a_nb_{n+1}^2}z_{n+1}^2\\ &= -\left[b_nq_n - \frac{a_n(\Delta b_n)^2}{4\alpha b_n}\right]^2 - \frac{\alpha b_n}{a_nb_{n+1}^2}\left[z_{n+1} - \frac{a_n\Delta b_nb_{n+1}}{2\alpha b_n}\right]\\ &\leqslant -\left[b_nq_n - \frac{a_n(\Delta b_n)^2}{4\alpha b_n}\right]^2, \quad n \geqslant n_1.\end{aligned}$$

由(4.9.13)可知矛盾，$\Delta y_n<0$ 时的证明类似定理 4.9.1．省略，证毕．

例 4.9.3　方程

$$\Delta(n^2(n+1)\Delta y_n) + \Delta y_n + \frac{n^2+n+1}{n+1}y_n = 0.$$

满足定理 4.9.3 条件，而 $y_n = \frac{1}{n}$ 是它的一个解．

最后，我们考虑差分方程

$$\Delta^2 y_n + p_n\Delta y_n + q_nf(y_{n+1}) = 0, \quad n = 0,1,2,\cdots \qquad (4.9.14)$$

这里对$\{p_n\}$和$\{q_n\}$没有符号限制，而 f 除需要满足条件(c_1)外，设有 g 使得

$$f(u) - f(v) = g(u,v)(u-v), u \neq 0, v \neq 0, g(u,v) \geqslant L > 0.$$

先给出一个引理，它对后边定理的建立是必要的．

引理 4.9.1　$K(n,s,y)$是定义在$[n_0,\infty]\times[n_0,\infty]\times\mathbf{R}^+$上的实值函数，对固定的 n 和 s 关于 y 非减．$\{p_n\}_{n=n_0}^{\infty}$是已知实数列，$\{y_n\}$和$\{z_n\}$分别是

$$y_n \geqslant p_n + \sum_{s=n_0}^{n-1}K(n,s,y_n), \quad n \geqslant n_0, \qquad (4.9.15)$$

和

$$z_n = p_n + \sum_{s=n_0}^{n-1} K(n,s,z_n), \quad n \geqslant n_0, \tag{4.9.16}$$

的解，则 $n \geqslant n_0$ 时有 $z_n \leqslant y_n$.

证明 设有 $l \geqslant n_0$ 使得 $s \leqslant l$ 有 $z_s \leqslant y_s$ 而 $z_{l+1} > y_{l+1}$，但

$$z_{l+1} - y_{l+1} \leqslant \sum_{s=n_0}^{l} [K(l+1,s,z_s) - K(l+1,s,y_s)] \leqslant 0.$$

这是一个矛盾，证毕.

定理 4.9.4. 假设(4.9.9)成立，且

$$(n+1)p_n \leqslant 1 \text{ 最终成立}, \tag{4.9.17}$$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (n+1)p_n^2 < \infty, \tag{4.9.18}$$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (n+1)q_{n+1} = \infty, \tag{4.9.19}$$

则(4.9.14)振动.

证明 设 $\{y_n\}$ 是(4.9.14)的一个最终正解，则有 M 使得 $n \geqslant M-1 \geqslant n_0$ 时 $y_n > 0$. (4.9.14)两边乘以 $(n+1)/f(y_{n+1})$ 并从 M 到 $n-1$ 求和，我们有

$$\frac{n\Delta y_n}{f(y_n)} - \sum_{s=M}^{n-1} \frac{\Delta y_s}{f(y_{s+1})} + \sum_{s=M}^{n-1} \frac{sg(y_s,y_{s+1})(\Delta y_s)}{f(y_s)f(y_{s+1})}$$
$$+ \sum_{s=M}^{n-1} \frac{(s+1)p_s\Delta y_s}{f(y_{s+1})} + \sum_{s=M}^{n-1}(s+1)q_{s+1} = \frac{M\Delta y_M}{f(y_M)}. \tag{4.9.20}$$

由 Schwartz 不等式可和

$$\left(\sum_{s=M}^{n-1} \frac{(s+1)p_s\Delta y_s}{f(y_{s+1})}\right)^2 \leqslant K^2 \sum_{s=M}^{n-1} \frac{(s+1)(\Delta y_s)^2}{f^2(y_{s+1})}, \tag{4.9.21}$$

其中 $K^2 = \sum_{n=M}^{\infty}(n+1)p_n^2, K > 0$. 将(4.9.21)代入(4.9.20)，则有

$$\frac{n\Delta y_n}{f(y_n)} - \sum_{s=M}^{n-1}\frac{\Delta y_s}{f(y_{s+1})} + L\sum_{s=M}^{n-1}\frac{s(\Delta y_s)^2}{f(y_s)f(y_{s+1})}$$

$$- K\left(\sum_{s=M}^{n-1}\frac{(s+1)(\Delta y_s)^2}{f^2(y_{s+1})}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \sum_{s=M}^{n-1}(s+1)q_{s+1} \leqslant \frac{M\Delta y_M}{f(y_M)}. \tag{4.9.22}$$

注意到

$$L\sum_{s=M}^{n-1}\frac{s(\Delta y_s)^2}{f(y_s)f(y_{s+1})} - K\left(\sum_{s=M}^{n-1}\frac{(s+1)(\Delta y_s)^2}{f^2(y_{s+1})}\right)^{\frac{1}{2}}$$

有下界，由(4.9.9)和(4.9.19)及(4.9.22)可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\Delta y_n}{f(y_n)} = -\infty.$$

则有 $M_1 > M$ 使得 $n \geqslant M_1$ 时 $\Delta y_n < 0$. 将(4.9.20)写成

$$\frac{n\Delta y_n}{f(y_n)} + \sum_{s=M_1}^{n-1}\frac{sg(y_s, y_{s+1})(\Delta y_s)^2}{f(y_s)f(y_{s+1})} = \frac{M\Delta y_M}{f(y_M)}$$

$$+ \sum_{s=M}^{M_1-1}\frac{(1-(s+1)p_s)\Delta y_s}{f(y_{s+1})} + \sum_{s=M_1}^{n-1}\frac{(1-(s+1)p_s)\Delta y_s}{f(y_{s+1})}$$

$$- \sum_{s=M}^{M_1-1}\frac{sg(y_s, y_{s+1})(\Delta y_s)^2}{f(y_s)f(y_{s+1})} - \sum_{s=M}^{n-1}(s+1)q_{s+1},$$

由(4.9.17)，(4.9.19)及 $\{y_n\}$ 的单调性可知有 $M_2 \geqslant M_1$ 使得

$$\frac{n\Delta y_n}{f(y_n)} + \sum_{s=M_1}^{n-1}\frac{sg(y_s, y_{s+1})(\Delta y_s)^2}{f(y_s)f(y_{s+1})} \leqslant -m, n \geqslant M_2,$$

其中 m 是正常数. 因此

$$w_n \geqslant mf(y_n) + \sum_{s=M_2}^{n-1}\frac{f(y_n)g(y_s, y_{s+1})(-\Delta y_s)}{f(y_s)f(y_{s+1})}w_s, \quad n \geqslant M_2$$

其中 $w_n = -n\Delta y_n$. 定义

$$K(n,s,z)=\frac{f(y_n)g(y_s,y_{s+1})(-\Delta y_s)}{f(y_s)f(y_{s+1})}z.$$

由引理 4.9.1 可知有 v_n 使得 $w_n \geqslant v_n$ 并满足

$$v_n = mf(y_n)+\sum_{s=M_2}^{n-1}\frac{f(y_n)g(y_s,y_{s+1})(-\Delta y_s)}{f(y_s)f(y_{s+1})}v_s, n\geqslant M_2. \tag{4.9.23}$$

(4.9.23)除以 $f(y_n)$，然后求 Δ，易见 $\Delta v_n \equiv 0$. 因此

$$w_n \geqslant v_n = mf(y_{m_2}),\quad n\geqslant M_2.$$

即有

$$\Delta y_n \leqslant \frac{-mf(y_{M_2})}{n},\quad n\geqslant M_2.$$

求和可知 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$. 这是一个矛盾，证毕．

例 4.9.4　考虑方程

$$\Delta^2 y_n + \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}\Delta y_n + \frac{2(n+1)^2-(-1)^2}{(n+1)^2}(y_{n+1}+y_{n+1}^2)=0,$$

它满足定理 4.9.4 的条件，$y_n=(-1)^n$ 是它的一个解．

定理 4.9.5　假设(4.9.17)和(4.9.19)成立，且

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{((n+1)p_n-1)^2}{n}<\infty, \tag{4.9.24}$$

则(4.9.14)振动．

证明　按定理 4.9.4 证明有(4.9.21)，而

$$\left[\sum_{s=M}^{n-1}\frac{((s+1)p_s-1)\Delta y_s}{f(y_{s+1})}\right]^2 \leqslant K^2\sum_{s=M}^{n-1}\frac{s(\Delta y_s)^2}{f^2(y_{s+1})},$$

其中 $K^2=\sum\limits_{n=M}^{\infty}\frac{((n+1)p_n-1)^2}{n}$. 因此有类似(4.9.22)的不等式，其余证明类似定理 4.9.4 证毕．

由定理 4.9.5 可证得方程

$$\Delta^2 y_n + \frac{1}{n+1}\Delta y_n + \frac{\lambda + \mu(-1)^n}{(n+1)^2} y_{n+1} = 0,$$

当 $\lambda>0$ 时振动,

定理 4.9.6 设有 $0\leqslant\alpha<1$ 使得

$$p_n \leqslant \frac{\Delta(n^\alpha)}{(n+1)^\alpha} \text{ 最终成立}, \tag{4.9.25}$$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}(n+1)^\alpha p_n^2 < \infty, \tag{4.9.26}$$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}(n+1)^\alpha q_{n+1} = \infty, \tag{4.9.27}$$

则(4.9.14)振动.

证明方法类似于定理 4.9.4 省略.

§4.10 二阶差分方程非振动解的渐近分类

本节中,将考虑差分方程

$$\Delta(r_n g(\Delta x_n)) + f(n,x_n) = 0, \quad n = k, k+1, \cdots, \tag{4.10.1}$$

其中 k 是固定的正整数,$\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$是正数列,$f(n,x)$是定义在$\{k,k+1,\cdots\}\times\mathbf{R}$上的实值函数且关于第二变量连续,对于固定的 n 当$x>0$ 时,$f(n,x)>0$,$g(x)$是 $\mathbf{R}$ 上的单增连续函数且满足 $g(0)=0$,$g^{-1}(-u)=-\alpha g^{-1}(u)$,$g^{-1}(uv)\leqslant\beta g^{-1}(u)g^{-1}(v)$,其中 α,β 是正常数,u,v 是任意正数.

另外,如果对某一正数 w 及任意数对 u 和 v 有 $g^{-1}(uv)=wg^{-1}(u)g^{-1}(v)$成立,则称 g 满足w条件.如果对固定的 n,$\frac{f(n,x)}{x}$对于 x 非减,称 f 是强线性的;如果对固定的 n 关于x,$\frac{f(n,x)}{x}$是非增的,称 f 是次线性的.

如果 $0<a\leqslant x\leqslant b$ 而 f 是强线性的，我们可知

$$f(n,a)\leqslant f(n,x)\leqslant f(n,b);$$

如果 $0<a\leqslant x\leqslant b$ 而 f 是次线性的，则有

$$\frac{a}{b}f(n,b)\leqslant f(n,x)\leqslant\frac{b}{a}f(n,a).$$

在本节中，我们将根据

$$\sum_{n=k}^{\infty}g^{-1}\left(\frac{1}{r_n}\right)<\infty \text{ 和 } \sum_{n=k}^{\infty}g^{-1}\left(\frac{1}{r_n}\right)=\infty$$

的情况来考虑方程(4.10.1)最终正解的分类.

为了讨论的方便，我们引入如下记号：

$$R_{s,n}=\sum_{i=s}^{n-1}g^{-1}\left(\frac{1}{r_i}\right),\ k\leqslant s\leqslant n-1,$$

$$R_s=\sum_{i=s}^{\infty}g^{-1}\left(\frac{1}{r_i}\right),\ s\geqslant k.$$

引理 4.10.1 设 $\{x_n\}$ 是(4.10.1)的最终正解，则 $\{\Delta x_n\}$ 最终是常号的.

证明 设有 $n_0\geqslant k$ 使得 $n\geqslant n_0$ 时 $x_n>0$，那么 $n\geqslant n_0$ 时 $f(n,x_n)>0$. 如果 $\{\Delta x_n\}$ 最终非正，则有 $n_1\geqslant n_0$ 使得 $\Delta x_{n_1}\leqslant 0$. 从而 $r_{n_1}g(\Delta x_{n_1})\leqslant 0$. 由(4 .10.1)可知

$$r_n g(\Delta x_n)-r_{n_1}g(\Delta x_{n_1})+\sum_{i=n_1}^{n-1}f(i,x_i)=0.$$

因此

$$r_n g(\Delta x_n)\leqslant-\sum_{i=n_1}^{n-1}f(i,x_i)<0,n\geqslant n_1.$$

即 $n\geqslant n_1$ 时，$\Delta x_n<0$ 证毕 .

引理 4.10.2 假设

$$R_k=\sum_{n=k}^{\infty}g^{-1}\left(\frac{1}{r_n}\right)<\infty, \tag{4.10.2}$$

$\{x_n\}$是(4.10.1)的最终正解,则存在$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

证明 如果结论不成立,则有$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$. 另一方面,由$\{r_n g(\Delta x_n)\}$的单调性可知有$n_1\geqslant k$使得

$$r_n g(\Delta x_n)\leqslant r_{n_1} g(\Delta x_{n_1}),\quad n\geqslant n_1.$$

那么

$$\begin{aligned}\Delta x_n&\leqslant g^{-1}\left(r_{n_1} g(\Delta x_{n_1})\frac{1}{r_n}\right)\\&\leqslant \beta g^{-1}\left(r_{n_1} g(\Delta x_{n_1})\right)g^{-1}\left(\frac{1}{r_n}\right),n\geqslant n_1.\end{aligned}\tag{4.10.3}$$

对(4.10.3)求和有

$$x_n-x_{n_1}\leqslant \beta g^{-1}(r_{n_1} g(\Delta x_{n_1}))R_{n_1,n},\quad n\geqslant n_1.$$

这矛盾于$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$. 证毕.

引理 4.10.2 (4.10.2)成立,$\{x_n\}$是(4.10.1)的最终正解,g满足w-条件,则有正数a_1和a_2及$N\geqslant k$使得$n\geqslant N$时$a_1R_n\leqslant x_n\leqslant a_2$.

证明 由引理4.10.2可知有$n_0\geqslant k$和a_2, 使得$n\geqslant n_0$时$x_n\leqslant a_2$.由引理4.10.1可知$\{\Delta x_n\}$是常号的. 如果$\Delta x_n>0$最终成立,则$R_n\leqslant x_n$最终自然成立. 如果$\Delta x_n<0$最终成立, 由$r_n g(\Delta x_n)$的单调性,(4.10.3)式及w-条件可知

$$\Delta x_n\leqslant ug^{-1}(r_{n_1} g(\Delta x_n))g^{-1}\left(\frac{1}{r_n}\right),\quad n\geqslant n_1.$$

对上式求和有

$$x_m-x_n\leqslant ug^{-1}(r_{n_1} g(\Delta x_{n_1}))\sum_{s=n}^{m-1} g^{-1}\left(\frac{1}{r_s}\right),\quad n\geqslant n_1.$$

让$m\to\infty$则有

$$x_n\geqslant -ug^{-1}\left(r_{n_1} g(\Delta x_{n_1})\right)R_n,\quad n\geqslant n_1.$$

证毕.

引理 4.10.4 (4.10.2)成立,$\{x_n\}$是(4.10.1)的最终正解,则

$$\sum_{n=k}^{\infty} g^{-1}\left(\frac{1}{r_n}\sum_{s=k}^{n-1} f(s,x_s)\right) < \infty.$$

证明 由引理 4.10.1 可知,不妨设 $n \geqslant k$ 时 $x_n > 0, \Delta x_n > 0$ 或 $\Delta x_n < 0$. 由(4.10.1),有

$$r_n g(\Delta x_n) - r_k g(\Delta x_k) + \sum_{s=k}^{n-1} f(s,x_s) = 0.$$

因此

$$\sum_{n=k}^{m} g^{-1}\left(\frac{1}{r_n}\sum_{s=k}^{n-1} f(s,x_s)\right) = \sum_{n=k}^{m} g^{-1}\left(\frac{1}{r_n}(r_k g(\Delta x_k) - r_n g(\Delta x_n))\right).$$

如果 $\Delta x_n > 0$ 成立,则有

$$\sum_{n=k}^{m} g^{-1}\left(\frac{1}{r_n}\sum_{s=k}^{n-1} f(s,x_s)\right) \leqslant \beta g^{-1}(r_k g(\Delta x_k)) \sum_{n=k}^{m} g^{-1}\left(\frac{1}{r_n}\right).$$

因此

$$\sum_{n=k}^{\infty} g^{-1}\left(\frac{1}{r_n}\sum_{s=k}^{n-1} f(s,x_s)\right) \leqslant \beta g^{-1}(r_k g(\Delta x_k)) R_k < \infty.$$

如果 $\Delta x_n < 0$, 则有

$$\begin{aligned}\sum_{n=k}^{\infty} g^{-1}\left(\frac{1}{r_n}\sum_{s=k}^{n-1} f(s,x_s)\right) &\leqslant \sum_{n=k}^{\infty} g^{-1}(-g(\Delta x_n)) \\ &= -\frac{1}{\alpha}\sum_{n=k}^{\infty} g^{-1}(g(\Delta x_n)) \\ &\leqslant -\frac{1}{\alpha}\sum_{n=k}^{\infty} \Delta x_n \leqslant \frac{1}{\alpha} x_k < \infty.\end{aligned}$$

证毕.

引理 4.10.5 假设

$$R_k = \sum_{n=k}^{\infty} g^{-1}\left(\frac{1}{r_n}\right) = \infty, \tag{4.10.4}$$

g 满足 w - 条件,$\{x_n\}$是(4.10.1)的最终正解,则$\{\Delta x_n\}$最终为正且

有正数 c_1 和 c_2 及 $M \geqslant k$ 使得 $n \geqslant M$ 有 $c_1 \leqslant x_n \leqslant c_2 R_{M,n}$.

证明 由引理4.10.1可知有 N, 使得 $n \geqslant N$ 时, $x_n > 0, \Delta x_n > 0$, 或 $\Delta x_n < 0$. 如果 $\Delta x_n < 0$, 则有

$$r_n g(\Delta x_n) \leqslant r_N g(\Delta x_N) < 0.$$

因此

$$\Delta x_n \leqslant u g^{-1}(r_N g(\Delta x_N)) g^{-1}\left(\frac{1}{r_n}\right), \quad n \geqslant N.$$

于是

$$x_n - x_N \leqslant u g^{-1}(r_N g(\Delta x_N)) \sum_{s=N}^{n-1} g^{-1}\left(\frac{1}{r_s}\right).$$

注意到(4.10.4), 可知矛盾. 因此 $\Delta x_n > 0$ 最终成立. 从而有 $c_1 > 0$ 使得 $n \geqslant N$ 时 $x_n \geqslant c_1$. 同时,

$$x_n \leqslant x_N + u g^{-1}(r_N g(\Delta x_N)) \sum_{j=N}^{n-1} g^{-1}\left(\frac{1}{r_j}\right), \quad n \geqslant N.$$

由(4.10.4)可知有 c_2 及 M, 使得 $n \geqslant M$ 时 $x_n \leqslant c_2 R_{M,n}$. 证毕.

定理 4.10.1 如果(4.10.2)成立, 则(4.10.1)的最终正解属于下列类型之一:

$$S_0 = \{\{x_n\} \in S \mid x_n \to 0\},$$

$$S_{+,*} = \{\{x_n\} \in S \mid \lim_{n\to\infty} x_n \in (0,\infty), \lim_{n\to\infty} r_n g(\Delta x_n) \in R\},$$

$$S_{+,\infty} = \{\{x_n\} \in S \mid \lim_{n\to\infty} x_n \in (0,\infty), \lim_{n\to\infty} r_n g(\Delta x_n) = -\infty\}.$$

证明 由引理 4.10.2 可知 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在, 则它或为零或为正数, 注意到 $r_n g(\Delta x_n)$ 的非增性, 我们得证该结论成立.

定理 4.10.2 (4.10.2)成立, f 是强线性的, (4.10.1)有一个最终正解 $\{x_n\} \in S_+ = S_{+,*} \cup S_{+,-\infty}$, 的充要条件是

$$\sum_{n=k}^{\infty} g^{-1}\left(\frac{1}{r_n}\sum_{s=k}^{n-1} f(s,c)\right) < \infty, \tag{4.10.5}$$

对某一 $c > 0$ 成立.

证明 设$\{x_n\}\in S_+$是(4.10.1)的一个解,则有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c>0$,于是有$c_1>0,c_2>0$和$N\geqslant k$使得$n\geqslant N$时$c_1\leqslant x_n\leqslant c_2$,而由引理4.10.4可证

$$\sum_{n=k}^{\infty}g^{-1}\left(\frac{1}{r_n}\sum_{s=k}^{n-1}f(s,x_s)\right)<\infty.$$

由f的强线性性,则有

$$\sum_{n=N}^{\infty}g^{-1}\left(\frac{1}{r_n}\sum_{s=k}^{n-1}f(s,c_1)\right)<\infty.$$

如果(4.10.5)成立,令$a=c/2$,则有N使得$n\geqslant N$时

$$\sum_{n=N}^{\infty}g^{-1}\left(\frac{1}{r_n}\sum_{s=k}^{n-1}f(s,c)\right)<a/\alpha. \tag{4.10.6}$$

设l_∞^N是所有实数列$x=\{x_n\}_{n=N}^{\infty}$组成的集合,定义上确界范数,则l_∞^N构成Banach空间.令

$$\Omega=\{\{x_n\}_{n=N}^{\infty}\in l_\infty^N:a\leqslant x_n\leqslant 2a,n\geqslant N\}.$$

定义如下算子

$$(Tx)_n=a-\sum_{s=n}^{\infty}g^{-1}\left(\frac{-1}{r_s}\sum_{i=k}^{s-1}f(i,x_i)\right). \tag{4.10.7}$$

任取$x\in\Omega$,则有

$$a\leqslant(Tx)_n=a+\alpha\sum_{s=n}^{\infty}g^{-1}\left(\frac{1}{r_s}\sum_{i=k}^{s-1}f(i,x_i)\right).$$

$$\leqslant a+\alpha\sum_{s=n}^{\infty}g^{-1}\left(\frac{1}{r_s}\sum_{i=k}^{s-1}f(i,c)\right)\leqslant 2a.$$

$\varepsilon>0$,选择$M\geqslant N$使得

$$\sum_{s=n}^{\infty}g^{-1}\left(\frac{1}{r_s}\sum_{i=k}^{s-1}f(i,c)\right)<\frac{\varepsilon}{2\alpha},\quad n\geqslant N. \tag{4.10.8}$$

设$\{x^{(v)}\}$是Ω中的序列,满足$\lim\limits_{v\to\infty}x^{(v)}=x$,由$\Omega$的闭性可知$x\in\Omega$.

于是,

$$|(Tx^{(v)})_n-(Tx)_n|\leqslant \alpha\sum_{s=n}^{\infty}g^{-1}\Big(\frac{1}{r_s}\sum_{i=k}^{s-1}f(i,x_i^{(0)})\Big)$$

$$+\alpha\sum_{s=n}^{\infty}g^{-1}\Big(\frac{1}{r_s}\sum_{i=k}^{s-1}f(i,x_i)\Big)$$

$$\leqslant 2\alpha\sum_{s=n}^{\infty}g^{-1}\Big(\frac{1}{r_s}\sum_{i=k}^{s-1}f(i,c)\Big)<\varepsilon,\quad n\geqslant M.$$

于是，T 是一连续算子．

当 $m,n\geqslant M$ 时，由 g 的假设及(4.10.8)可知

$$|(Tx^{(v)})_m-(Tx)_n|$$

$$\leqslant\alpha\Big(\sum_{s=n}^{\infty}+\sum_{s=m}^{\infty}\Big)g^{-1}\Big(\frac{1}{r_s}\sum_{i=k}^{s-1}f(i,x_i)\Big)<\varepsilon.$$

即知 $T\Omega$ 是一致 Cauchy 的. 于是，T 在 Ω 上有不动点 x^*，x^* 是(4.11.1)的一个解. 证毕．

定理 4.10.3　(4.10.2)成立，f 是强线性的，(4.10.1)有一个解 $x\in S_+$ 当且仅当(4.10.5)和

$$\sum_{n=k}^{\infty}f(n,D)<\infty,\tag{4.10.9}$$

对某一 $D>0$ 成立.

证明　如果 $x\in S_{+,*}$，由定理 4.10.2 的证明可知有 c_1、c_2 及 N 使得 $n>N$ 时，有 $c_1\leqslant x_n\leqslant c_2$. 由(4.10.1)可知

$$\sum_{n=N}^{\infty}f(n,c_1)\leqslant\sum_{n=N}^{\infty}f(n,x_n)=r_Ng(\Delta x_N)-\lim_{m\to\infty}r_mg(\Delta x_m)<\infty.$$

相反，由定理 4.10.2 的证明可知 x^* 是(4.10.1)的一个解，它满足

$$r_ng(\Delta x_n^*)=\sum_{s=n}^{\infty}f(s,x_s^*),\quad n\geqslant N.$$

显然由(4.10.9) 知 $\lim\limits_{n\to\infty}r_ng(\Delta r_n^*)=0$，证毕．

我们注意到，如果令

$$\Omega = \left\{x \in l_\infty^N : \frac{a}{2} \leqslant x_n \leqslant a,\ n \geqslant N\right\},$$

$$(Tx_n) = a - \sum_{s=n}^{\infty} g^{-1}\left(\frac{\alpha}{r_s} + \frac{1}{r_s}\sum_{i=s}^{\infty} f(i, x_i)\right). \quad (4.10.10)$$

由条件 (4.10.5) 和 (4.10.9)类似定理4.10.2，可证 T 在 Ω 上有不动点 u 满足 $\lim_{n\to\infty} u_n = a > 0$，且

$$r_n g(\Delta u_n) = \alpha + \sum_{s=n}^{\infty} f(s, x_s), \quad n \geqslant N.$$

显然有 $\lim_{n\to\infty} r_n g(\Delta u_n) = \alpha > 0$，因此有如下结果．

定理 4.10.4 (4.10.2)成立，f 是强线性的，(4.10.1)有一个解 $x \in S_{+,\infty}$，当且仅当(4.10.5) 和

$$\sum_{n=k}^{\infty} f(n, D) = \infty, \quad (4.10.11)$$

对某一 D 成立．

定理 4.10.5 (4.10.2)成立，f 是强线性的，g 满足 w－条件，且对于 $u > 0$ 时 $(g^{-1}(u))' > 0$.

$$\sum_{n=k}^{\infty} f(n, LR_n) < \infty, \quad (4.10.12)$$

其中

$$L = \max(1, w\alpha g^{-1}(2) + w\alpha M), M = \max_{1 \leqslant u \leqslant 2}(g^{-1}(u))',$$

那么(4.10.1)有一个正解 $x \in S_0$. 相反，如果(4.10.1)有一正解 $\{x_n\}$ 满足和 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ 和 $\lim_{n\to\infty} r_n g(\Delta x_n) = d \neq 0$，则

$$\sum_{n=k}^{\infty} f(n, CR_n) < \infty,$$

对某一 $c > 0$ 成立．

证明 由(4.10.12)可知有 N 使得 $n \geqslant N$ 时

$$\sum_{i=n}^{\infty} f(i, LR_i) < 1, \quad (4.10.13)$$

$$\Omega=\{x\in l_\infty^N:u\alpha g^{-1}(1)R_n\leqslant x_n\leqslant LR_n,\quad n\geqslant N\}.$$

定义算子

$$T(x)_n=u\alpha R_n g^{-1}\Big(1+\sum_{s=n}^{\infty}f(s,x_s)\Big)$$
$$+u\alpha\sum_{s=n}^{\infty}R_{s+1}\Delta g^{-1}\Big(1+\sum_{i=s}^{\infty}f(i,x_i)\Big),\quad n\geqslant N,\tag{4.10.14}$$

其中

$$\Delta g^{-1}\Big(1+\sum_{i=s}^{\infty}f(i,x_i)\Big)$$
$$=g^{-1}\Big(1+\sum_{i=s+1}^{\infty}f(i,x_i)\Big)-g^{-1}\Big(1+\sum_{i=s}^{\infty}f(i,x_i)\Big).$$

$x\in\Omega$ 时，$(Tx)_n\geqslant u\alpha g^{-1}(1)R_n$ 显然成立，且由中值定理有

$$T(x)_n\leqslant u\alpha g^{-1}(2)R_n+u\alpha MR_n\sum_{s=k}^{\infty}f(s,x_s)$$
$$\leqslant(u\alpha g^{-1}(2)+u\alpha M)R_n,\quad n\geqslant N^*.$$

对 $\varepsilon>0$,选择 N^* 足够大,使得

$$\sum_{s=n}^{\infty}f(s,LR_s)<\frac{\varepsilon}{4u\alpha MR_k},\quad n\geqslant N^*.$$

$\{x^{(v)}\}\subset\Omega$ 满足 $x^{(v)}\to x$,由 Ω 的闭性可知 $x\in\Omega$. 而

$$\big|(Tx^{(v)})_n-(Tx)_n\big|$$
$$\leqslant u\alpha R_n\Big|g^{-1}\Big(1+\sum_{s=n}^{\infty}f(s,x_s^{(v)})\Big)-g^{-1}\Big(1+\sum_{s=n}^{\infty}f(s,x_s)\Big)\Big|$$
$$+u\alpha\sum_{s=n}^{\infty}R_{s+1}\Big|\Delta g^{-1}\Big(1+\sum_{i=s}^{\infty}f(i,x_i^{(v)})\Big)-\Delta g^{-1}\Big(1+\sum_{i=s}^{\infty}f(i,x_i)\Big)\Big|$$
$$\leqslant 2u\alpha MR_n\sum_{s=n}^{\infty}\big|f(s,x_s^{(v)})-f(s,x_s)\big|$$

$$\leqslant 4u\omega MR_n \sum_{s=n}^{\infty} f(s, lR_s) < \varepsilon, \quad n \geqslant N^*,$$

即 T 是连续的. $T\Omega$ 的一致 Cauchy 性类似可证. 于是, T 在 Ω 上有不动点 x^*. 易知, x^* 是(4.10.1)满足条件的解.

相反, 设 (4.10.1) 有一个正解 $\{x_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n g(\Delta x_n) = d < 0$, ($d > 0$ 类似可证)则有 $c_1, c_2 < 0$ 和 $N \geqslant K$, 使得 $n \geqslant N$ 时, $c_1 < r_n g(\Delta x_n) < c_2$. 因此

$$ug^{-1}(c_1)g^{-1}\left(\frac{1}{r_n}\right) < \Delta x_n < ug^{-1}(c_2)g^{-1}\left(\frac{1}{r_n}\right),$$

且

$$ug^{-1}(c_1)R_n < -x_n < ug^{-1}(c_2)R_n, \quad n \geqslant N.$$

令 $a_2 = -ug^{-1}(c_1)$, $a_1 = -ug^{-1}(c_2)$, 则有

$$0 < a_1 R_n \leqslant x_n \leqslant a_2 R_n. \quad n \geqslant N.$$

而由(4.10.1)可知

$$\sum_{n=N}^{\infty} f(n, x_n) = r_N g(\Delta x_N) - d < \infty.$$

因此

$$\sum_{n=N}^{\infty} f(n, a_1 R_n) \leqslant \sum_{n=N}^{\infty} f(n, x_n) < \infty.$$

证毕.

如果 $R_k = \infty$, g 满足 w - 条件, S 是(4.10.1)所有最终正解集, 当 $x \in S$ 时, 由引理 4.10.5 的证明可知 $\Delta x_n > 0$, 及 $r_n g(\Delta x_n) > 0$ 最终成立. 因此 $\{x_n\}$ 或趋于正数或趋于 $+\infty$, 且 $r_n g(\Delta x_n)$ 趋于非负数. 注意到 $\{x_n\}$ 趋于正常数时 $\{r_n g(\Delta x_n)\}$ 必然趋于零. 否则 $r_n g(\Delta x_n) \geqslant d > 0$, 有

$$\Delta x_n \geqslant ug^{-1}(d)g^{-1}\left(\frac{1}{r_n}\right).$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty.$$

这是一个矛盾.

定理 4.10.6 $R_k=\infty$, f 是强线性的, g 满足 w - 条件, 则 (4.10.1)有一个正解 $x\in S^{+,0}$ 当且仅当

$$\sum_{n=k}^{\infty} g^{-1}\left(\frac{1}{r_n}\sum_{s=n}^{\infty} f(s,c)\right)<\infty \tag{4.10.14}$$

对某一 $c=0$ 成立.

证明 设 $x\in S^{+,0}$, $\lim_{n\to\infty} x_n=c>0$, $\lim_{n\to\infty} r_n g(\Delta x_n)=0$, 则有正数 c_1,c_2 和 $N\geqslant k$, 使得 $n\geqslant N$ 时 $c_1\leqslant x_n\leqslant c_2$, 而由(4.10.1) 有,

$$r_n g(\Delta x_n) = \sum_{s=n}^{\infty} f(s,xs), \quad n\geqslant N.$$

于是

$$\sum_{s=N}^{\infty} g^{-1}\left(\frac{1}{r_s}\sum_{i=s}^{\infty} f(i,c_1)\right)\leqslant \sum_{s=N}^{\infty} g^{-1}\left(\frac{1}{r_s}\sum_{i=s}^{\infty} f(i,x_s)\right)\leqslant c-x_N.$$

逆命题类似定理 4.10.2, 设 $a=\frac{c}{2}$, 由(4.10.4)可选择足够大的 N 使得

$$\sum_{n=N}^{\infty} g^{-1}\left(\frac{1}{r_n}\sum_{s=n}^{\infty} f(s,c)\right)\leqslant \frac{a}{\alpha},\ n\geqslant N, \tag{4.10.15}$$

$$\Omega=\{x\in l_\infty^N: a\leqslant x_n\leqslant 2a, n\geqslant N\},$$

$$(Tx)_n = a-\sum_{s=n}^{\infty} g^{-1}\left(\frac{1}{r_s}\sum_{i=s}^{\infty} f(i,x_i)\right), n\geqslant N.$$

类似定理 4.10.2, 可知 T 在 Ω 上有不动点 x^* 它是满足定理条件的(4.10.1)的解. 证毕.

类似定理 4.10.3, 我们会有如下定理, 证明省略.

定理 4.10.7 $R_k=\infty$, f 是强线性的, g 满足 w - 条件且 $u>0$ 时 $(g^{-1}(u))'>0$. 如果

$$\sum_{n=k}^{\infty} f(n,cR_{k,n})<\infty \tag{4.10.16}$$

对某 $c>0$ 成立，则(4.10.1)有解 $x\in S^{\infty}$. 相反(4.10.1)有解 $x\in S^{\infty}$ 且满足 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n g(\Delta x_n)=a>0$，则(4.10.6)成立.

最后要说明的是定理 4.10.2～4.10.7 均对强线性 f 给出了证明，事实上这些定理对 f 是次线性的也成立.

§ 4.11 二阶差分方程振动解的渐近性

考虑二阶差分方程

$$\Delta(h(n)\Delta x_n)+p(n)f(x_{\sigma(n)})=g(n),n=0,1,\cdots, \tag{4.11.1}$$

其中 $\{h(n)\}_{n=0}^{\infty}$ 是正数列，$\{p(n)\},\{g(n)\},\{\sigma(n)\}$ 和 f 同 § 2.7 中的类似.

设 $\{x_n\}$ 是(4.11.1)的有界振动解，假设 $\sup\limits_{n\geq\sigma_*}|x_n|=M<\infty$,

$$\limsup_{n\to\infty}|x_n|>2\delta>0,$$

其中 $\sigma_*=\inf\limits_{n\geq 0}\sigma(n)>-\infty$. 由 § 2.7 中的知识可知，$x$ 有弧列 $\{x(\alpha_i,\beta_i)\}$ 使得

$$M_i=\max_{\alpha_i\leq j\leq\beta_i}|x_j|=|x_{r_i}|>\delta,j=1,2,\cdots.$$

从 $j\in\{\alpha_i-1,\cdots,r_i-1\}$ 到 r_i-1 对(4.11.1)求和，则有

$$h(r_i)\Delta x_{r_i}-h(j)\Delta x_j=-\sum_{k=j}^{r_i-1}p(k)f(x_{\sigma(k)})+\sum_{k=j}^{r_i-1}g(k).$$

假设 $x(\alpha_i,\beta_i)$ 是正弧，则有 $\Delta x_{r_i}\leq 0$. 于是有

$$\Delta x_j\leq\frac{1}{h(j)}\sum_{k=j}^{r_i-1}p(k)f(x_{\sigma(k)})-\frac{1}{h(j)}\sum_{k=j}^{r_i-1}g(k),$$

$$\sum_{j=\alpha_i-1}^{r_i-1}\Delta x_{r_j}=x_{r_i}-x_{\alpha_i-1}$$

$$\leqslant \sum_{\alpha_i-1}^{r_i-1} \frac{1}{h(j)} \sum_{k=j}^{r_i-1} p(k) f(x_{\sigma(k)}) - \sum_{j=\alpha_i-1}^{r_i-1} \frac{1}{h(j)} \sum_{k=j}^{r_i-1} g(k).$$

因 $x_{\alpha_i-1} \leqslant 0$，于是有

$$M_i = x_{r_i} \leqslant \sum_{j=\alpha_i-1}^{r_i-1} \frac{1}{h(j)} \sum_{k=j}^{r_i-1} |p(k) f(x_{\sigma(k)})| + \sum_{j=\alpha_i-1}^{r_i-1} \frac{1}{h(j)} \sum_{k=j}^{r_i-1} |g(k)|. \tag{4.11.2}$$

如果令 $|f(x)| \leqslant f(|x|)$，则有

$$M_i \leqslant f(M) \sum_{j=\alpha_i-1}^{r_i-1} \frac{1}{h(j)} \sum_{k=j}^{r_i-1} |p(k)| + \sum_{j=\alpha_i-1}^{r_i-1} \frac{1}{h(j)} \sum_{k=j}^{r_i-1} |g(k)|$$

$$\leqslant f(M) \sum_{j=\alpha_i-1}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} \frac{|p(k)|}{h(j)} + \sum_{j=\alpha_i-1}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} \frac{|g(k)|}{h(j)}.$$

当 $x(\alpha_i, \beta_i)$ 是负弧，类似可得如上不等式. 于是有如下结果：

定理 4.11.1　设 $|f(x)| \leqslant f(|x|)$，且或者

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{h(i)} = \infty, \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{|p(k)|}{h(j)} < \infty,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{|g(k)|}{h(j)} < \infty, \tag{4.11.3}$$

或者

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{h(i)} < \infty, \sum_{k=0}^{\infty} |p(k)| < \infty, \sum_{k=0}^{\infty} |q(k)| < \infty, \tag{4.11.4}$$

则(4.11.1)的有界振动解 $\{x_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

类似于 § 2.7，我们也会有如下结果：

定理 4.11.2　定理 4.11.1 的条件成立，且 $\sigma(n) \leqslant n+1$，

$$\lim_{|x|\to\infty} \sup \frac{f(x)}{x} = \Gamma < \infty, \tag{4.11.5}$$

则(4.11.3)的振动解有界.

定理 4.11.3　$\sigma(n)=n+1$,且或者有

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{h(i)}=\infty,\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}\frac{p^{+}(k)}{h(j)},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}\frac{|g(k)|}{h(j)}<\infty, \tag{4.11.6}$$

或者有

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{h(i)}<\infty,\sum_{i=0}^{\infty}p^{-}(i)<\infty,\sum_{i=0}^{\infty}|g(i)|<\infty,$$

则定理 4.11.1 的结论成立.

定理 4.11.4　定理 4.11.3 的条件和(4.11.5)成立，则(4.11.1)的振动解有界.

定理 4.11.5　假设$|f(x)|\leqslant f(|x|)$，且

$$\sum_{i=0}^{\infty}|p(i)|<\infty,\sum_{i=0}^{\infty}|g(i)|<\infty,$$

$$\limsup_{n\to\infty}\sum_{i=n}^{n+c+1}\frac{1}{h(i)}<\infty, \tag{4.11.7}$$

则(4.11.1)有振动距离界 c 的有界解$\{x_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

定理 4.11.6　假设$|f(x)|\leqslant f(|x|)$,$\sigma(n)\leqslant n+1$,且(4.11.5)和(4.11.7)成立，则(4.11.1)有振动距离界的解有界.

定理 4.11.7　$\sigma(n)=n+1$，且

$$\sum_{i=0}^{\infty}p^{+}(i)<\infty,\sum_{n=0}^{\infty}|g(n)|<\infty,\limsup_{n\to\infty}\sum_{i=n}^{n+c+1}\frac{1}{h(i)}<\infty,$$

则定理 4.11.5 的结论成立.如果再附加(4.11.5)，则定理 4.11.6 的结论成立.

本节中的定理并未给出详细证明，这些留给读者，它们与§2.7中的证明方法类似.

例如方程

$$\Delta^2 x_n + \frac{1}{(n+1)^3} x_{n+1}^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{(n+2)^3}\sin(n+2) - \frac{2}{(n+1)^3}\sin(n+1)$$
$$+ \frac{1}{n^3}\sin n + \frac{1}{(n+1)^4}\sin^{\frac{1}{3}}(n+1)$$

满足定理 4.11.4 的条件，$\left\{\frac{\sin n}{n^3}\right\}$就是满足要求的解.

§ 4.12　半线性差分方程的正解

考虑差分方程

$$\Delta(r_{n-1}(\Delta x_{n-1})^\alpha) + q_n x_n^\alpha = 0,\ n = 1,2,\cdots, \qquad (4.12.1)$$

其中$\{r_n\}$是正数列，$\{q_n\}$是非负数列，且有正子列，α 是正的奇数之比. 方程（4.12.1）之所以称为半线性差分方程，主要是因为(4.12.1)的一个解的常数倍仍是它的一个解.

如下条件是本节将要用到的，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r_n^{\frac{1}{\alpha}}} = \infty. \qquad (4.12.2)$$

设$\{x_n\}$是(4.12.1)的最终正解，由(4.12.1)可知

$$\Delta(r_{n-1}(\Delta x_{n-1})^\alpha) = -q_n x_n^\alpha \leqslant 0$$

最终成立. 由于$\{q_n\}$存在正的子列，于是$\{r_n(\Delta x_n)^\alpha\}$最终或正或负. 如果后者成立，则有 $c>0$ 及正整数 N 使得 $n \geqslant N$ 时

$$r_n(\Delta x_n)^\alpha \leqslant c < 0,$$

或

$$\Delta x_n \leqslant \frac{c^{\frac{1}{\alpha}}}{r_n^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

从 N 到 n 对上式求和，有

$$x_{n+1}-x_N \leqslant c^{\frac{1}{\alpha}}\sum_{k=N}^{n}\frac{1}{r_k^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

由(4.12.2)可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$. 这是一个矛盾，于是 $|r_n(\Delta x_n)^\alpha|$ 是最终正的非增序列. 作 Riccati 型变换

$$\omega_n=\frac{r_n(\Delta x_n)^\alpha}{x_n^\alpha}. \tag{4.12.3}$$

对(4.12.1)两边同除以 x_n^α，并将(4.12.3)代入，则有

$$\omega_n-\omega_{n-1}\left[\left(\frac{\omega(n-1)}{r_{n-1}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}+1\right]^{-\alpha}+q_n=0, \tag{4.12.4}$$

即

$$\Delta\omega_{n-1}+\omega_{n-1}\left\{1-\left[\left(\frac{\omega(n-1)}{r_{n-1}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}+1\right]^{-\alpha}\right\}+q_n=0.$$

令

$$F(x,y,z)=x\left\{1-\left[\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}}+1\right]^{-z}\right\}=\frac{x\left[(x^{\frac{1}{z}}+y^{\frac{1}{z}})^z-y\right]}{(x^{\frac{1}{z}}+y^{\frac{1}{z}})^z},$$

则(4.12.4)变为

$$\Delta\omega_{n-1}+F(\omega_{n-1},r_{n-1},\alpha)+q_n=0, n=1,2,\cdots. \tag{4.12.5}$$

注意到当 $x>0,y>0,z>0$ 时

$$F(x,y,z)>0, F'_x(x,y,z)=\frac{(x^{\frac{1}{z}}+y^{\frac{1}{z}})^{1+z}-y^{1+\frac{1}{z}}}{(x^{\frac{1}{z}}+y^{\frac{1}{z}})^{z+1}}>0,$$

$$F'_x(x,y,z)=\frac{-x^{1+\frac{1}{z}}}{(x^{\frac{1}{z}}+y^{\frac{1}{z}})^{1+z}}.$$

令 $g(z)=\ln(1+t^{\frac{1}{z}})^z$ 有

$$g'(z)=\frac{(1+t^{\frac{1}{z}})\ln(1+t^{\frac{1}{z}})-t^{\frac{1}{z}}\ln(1+t^{\frac{1}{z}})}{1+t^{\frac{1}{z}}}\geqslant 0,\quad t>0,$$

因此，$F(x,y,z)$关于 z 非减.

定理 4.12.1 方程(4.12.1)有一个最终正解$\{x_n\}$当且仅当

$$\omega_n\geqslant\sum_{k=n}^{\infty}F(\omega_k,r_k,\alpha)+\sum_{k=n}^{\infty}g_{k+1},\quad n\geqslant 0 \qquad (4.12.6)$$

有一个最终正解.

证明 设$\{x_n\}$是(4.12.1)的最终正解. 由(4.12.3)定义 ω_n. 它就是(4.12.6)的一个最终正解. 相反，设$\{y_n\}$是(4.12.6)的正解. 定义算子 $T:l^{\infty}\to l^{\infty}$：如下：

$$(Tz)_n=\sum_{k=n}^{\infty}F(\omega_k,r_k,\alpha)+\sum_{k=n}^{\infty}q_{k+1},\quad n=0,1,\cdots,$$

其中 $z=\{z_n\}_{n=0}^{\infty}\in l^{\infty}$. 由(4.12.6)可知$(Ty)_n\leqslant y_n$. 构造序列

$$z^{(0)}=\{z_n^{(0)}\},z^{(1)}=\{z_n^{(1)}\},\cdots,$$

$$z^{(0)}=0, \qquad (4.12.7)$$

$$z_n^{(m+1)}=(Tz^{(m)})_n,n\geqslant 0,m=0,1,2,\cdots, \qquad (4.12.8)$$

由 $F(x,y,z)$的单调性可知

$$z_n^{(0)}\leqslant z_n^{(1)}\leqslant z_n^{(2)}\leqslant\cdots\leqslant z_n^{(m)}\leqslant\cdots\leqslant y_n,m\geqslant 0,n\geqslant 0.$$

于是，由 Lebesgue 收敛定理知有 ω 使得 $T\omega=\omega$，其中

$$\omega_n=\lim_{m\to\infty}z_n^{(m)},\quad n\geqslant 0.$$

这时令 $x_0=c_0>0$，

$$x_{n+1}=x_n\left[1+\left(\frac{\omega_n}{r_n}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\right].$$

它是(4.12.1)的最终正解.

由定理 4.12.1 及 F 的单调性，不难获得如下比较定理. 为了比较，先列出比较方程.

$$\Delta(R_{n-1}(\Delta z_{n-1})^{\mu})+Q_n z_n^{\mu}=0,\quad n=1,2,\cdots \tag{4.12.9}$$

其中 R_n,Q_n 和 μ 满足类似 r_n,g_n 和 α 的条件.

推论 4.12.1 设 $0<\mu\leqslant\alpha,0<r_n\leqslant R_n$,且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{R_n^{\frac{1}{\mu}}}=\infty, \tag{4.12.10}$$

$$\sum_{k=n}^{\infty}Q_k\leqslant\sum_{k=n}^{\infty}g_k,\quad n\geqslant 1, \tag{4.12.11}$$

则如果(4.12.1)有一个最终正解那么(4.12.9)也有一个最终正解.

由定理 4.12.1 的证明也不难推出如下结果.

定理 4.12.2 方程(4.12.1)有一个最终正解当且仅当由(4.12.7)和(4.12.8)定义的序列对于任意的 n 收敛.

由定理 4.12.2 马上有如下推论.

推论 4.12.2 如果对某一 m, $z^{(m)}$ 不存在, 或者对某一 n, $\lim\limits_{n\to\infty}z_n^{(m)}=\infty$, 则(4.12.1)无最终正解.

由此可见, 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n=\infty$, 则(4.12.1)无最终正解.

设算子 $S:l^{\infty}\to l^{\infty}$

$$(Su)_n=\sum_{k=n}^{\infty}F(u_k,r_k,\alpha),\quad n\geqslant 1,$$

其中 $u=\{u_n\}_{n=0}^{\infty}\in l^{\infty}$. 定义

$$\varphi_n^{(0)}=\sum_{k=n}^{\infty}q_{k+1},\quad n\geqslant 0, \tag{4.12.12}$$

$$\varphi_n^{(1)}=(S\varphi^{(0)})_n,\quad n\geqslant 0, \tag{4.12.13}$$

$$\varphi_n^{(m+1)}=[S(\varphi^{(0)}+\varphi^{(m)})]_n,\quad n\geqslant 0. \tag{4.12.14}$$

由 F 的单调性可知

$$\varphi_n^{(2)}=[S(\varphi^{(0)}+\varphi^{(1)})]_n\geqslant(S\varphi^{(0)})_n=\varphi_n^{(1)},\quad n\geqslant 0,$$

$$\varphi_n^{(3)}=[S(\varphi^{(0)}+\varphi^{(2)})]_n\geqslant[S(\varphi^{(0)}+\varphi^{(1)})]_n=\varphi_n^{(2)},\quad n\geqslant 0.$$

归纳可知

$$0 < \varphi_n^{(1)} \leqslant \varphi_n^{(2)} \leqslant \cdots \leqslant \cdots, \quad n \geqslant 0.$$

如果$\{\varphi_n^{(m)}\}$对任意的收敛，则由(4.12.14)可知

$$\varphi_n^{(0)} + \varphi_n = \varphi_n^{(0)} + \sum_{k=n}^{\infty} F(\varphi_k^{(0)} + \varphi_k, r_k, \alpha), \quad n \geqslant 0.$$

即 $\varphi_n^{(0)} + \varphi_n$ 是(4.12.6)的解. 相反，设(4.12.6)有一正解$\{y_n\}$，则有

$$(Sy)_n + \varphi_n^{(0)} \leqslant y_n, \quad n \geqslant 0.$$

$$\varphi_n^{(0)} \leqslant (Sy)_n + \varphi_n^{(0)} \leqslant y_n, n \geqslant 0.$$

$$\varphi_n^{(0)} + \varphi_n^{(1)} = \varphi_n^{(0)} + (S\varphi^{(0)})_n \leqslant \varphi_n^{(0)} + (Sy)_n \leqslant y_n, \quad n \geqslant 0.$$

归纳可知

$$\varphi_n^{(0)} + \varphi_n^{(m)} \leqslant y_n, \qquad n \geqslant 0, \quad m \geqslant 0.$$

于是有如下结果

定理 4.12.3 方程(4.12.1)有一个最终正解当且仅当由(4.12.12),(4.12.13)和(4.12.14)定义的序列$\{\varphi_n^{(n)}\}$对任意的 $n \geqslant 0$ 收敛.

§4.13 注记

二阶差分方程的振动性研究较早,例如见[65～69]. §4.1～4.3 是一些基本事实,可在一般的差分方程书中找到,例如 Kelley 和 Peterson的[9]. §4.4 中的定理则由 Cheng, Yan 和 Li 在[79]给出. §4.5 则参见 Hooker 和 Patula 的[73]. §4.6 见 Zhang 的[80]. §4.7 来自[83～84]. §4.8 的内容源于[87]和[88]. §4.9 是 Thandapani 和 Lalli 在[85]和[86]建立的. §4.10 是 Zhang[89]的内容. §4.11 见[39]及文献[70～72],[74～79],[81]和[82]也是讨论这类方程的振动性，读者可以参考. §4.12 的结果类似 Liu 和 Cheng[90]，但是稍有不同,它们是 Cheng 和 Zhang 在[91]中的扩充. 有关这方面的结果

很多，例如 Cheng 和 Lu[92]建立了 Hardy 型不等式，Li 和 Yeh 在[93]和[94]中获得了 Sturm 分离定理.有关的研究工作还可参见[95～100].

注意到§3.2中的结果，当二阶差分方程

$$\Delta^2 x_{n-1} + q_n f(x_n) = 0$$

中 q_n 非负时不会由时滞引起所有解振动.因此，我们在选材上尽量选择不含时滞的方程.带有时滞的二阶差分方程的振动结果也不多见.关于二阶非线性微分方程有相当多的非振动判定定理,但是,二阶非线性差分方程无任何类似结果.因此获得如此的结果是有价值的.另外,关于振动解的存在性定理也并未见到,有兴趣的读者也不妨考虑一下这些问题.

第五章　二阶中立型差分方程的振动性

有关二阶中立型差分方程的振动性工作并不多见. 因此，我们在本章中着重于基本技巧的介绍.

§5.1　利用一阶时滞差分方程判别

考虑中立型递推关系

$$\Delta(r_{n-1}\Delta(x_{n-1}-p_{n-1}x_{n-1-\tau}))+q_nx_{n-\sigma}\leqslant 0,\ n=1,2,\cdots,\tag{5.1.1}$$

其中 τ 是正整数，σ 是非负整数，$\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$是一个正数列，$\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$是一个非负实数列且有正子列，$\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$是一个实数列. 我们将分三种情况：(i)$0\leqslant p_n\leqslant 1$，(ii)$p_n\leqslant 0$，(iii)$p_n\geqslant 1$ 来讨论(5.1.1)最终正解的不存在性. 注意到当 $p_n\equiv 1$，$\tau=1$ 方程(5.1.1)变为三阶不等式

$$\Delta(r_{n-1}\Delta^2x_{n-2})+q_nx_{n-\sigma}\leqslant 0.$$

因此，将不讨论 $p_n\equiv 1$ 的情况.

为了方便起见，设$\{x_n\}$是 (5.1.1) 的一个解，我们定义伴随数列$\{y_n\}$为

$$y_n=x_n-p_nx_{n-\tau},\quad n\geqslant 0.\tag{5.1.2}$$

如果

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r_n}=\infty$$

成立，我们将其记为(H_1)；如果 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}r_n=\infty$ 成立，我们记其为

(H_2). 如果数列 $\{x_k\}$ 满足 $\liminf\limits_{k\to\infty} x_k = \omega > 0$, 则称 $\{x_k\}$ 是最终 ω－正的.

5.1.1 $0 \leqslant p_n \leqslant p^* < 1$ 情形

首先给出几个引理.

引理 5.1.1 假设 $0 \leqslant p_n \leqslant p^* < 1$, $\{x_n\}$ 是(5.1.1) 的最终 ω－正解, $\{y_n\}$ 由 (5.1.2)定义. 则 $y_n > 0$ 最终成立.

证明 由(5.1.1)和(5.1.2)可知

$$\Delta(r_{n-1}\Delta y_{n-1}) \leqslant -q_n x_{n-\sigma} \leqslant 0$$

最终成立. 注意到 $\{q_n\}$ 有正的子列, 可知上式不恒为零. 因此, $\{\Delta y_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 是常号的. 如果有 T 使得 $n \geqslant T$ 时 $\Delta y_n < 0$, 自然有 $y_n > 0$ 最终成立. 否则有 N 和正数 α, 使得 $n \geqslant N$ 时 $y_n \leqslant -\alpha$. 因此,

$$x_n = p_n x_{n-\tau} + y_n \leqslant x_{n-\tau} + y_n \leqslant x_{n-\tau} - \alpha, \quad n \geqslant N.$$

归纳可知,

$$x_{j\tau+N} \leqslant y_{j\tau+N} + x_{(j-1)\tau+N} \leqslant y_{j\tau+N} + y_{(j-1)\tau+N} + x_{(j-2)\tau+N}$$
$$\leqslant \cdots \leqslant -j\alpha + x_N.$$

当 j 充分大时, 上式右边为负. 这矛盾于 x_n 的正性.

如果 $\Delta y_n > 0$ 最终成立且引理的结论不是事实. 则 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \beta \leqslant 0$. 但

$$x_{n+\tau} - y_{n+\tau} = p_{n+\tau} x_n \leqslant p^* x_n.$$

两边取下极限, 有

$$\omega - \beta \leqslant p^* w.$$

即 $0 \geqslant \beta \geqslant \omega(1-p^*) > 0$. 这是一个矛盾. 证毕.

引理 5.1.2 $\{x_n\}$ 是 (5.1.1) 的最终 ω－正解, $\{y_n\}$ 由(5.1.2) 定义, 如果(H_1) 或(H_2) 成立, 则最终有 $\Delta y_n > 0$.

证明 如果结论不是事实, 则有

$$y_n > 0, \ \Delta y_n < 0, \ \Delta(r_n \Delta y_n) \leqslant 0$$

最终成立. 设有 N 使得 $n \geqslant N$ 时,

$$y_n > 0,\ \Delta y_n < 0,\ \Delta(r_n \Delta y_n) \leqslant 0.$$

当(H_1)成立时, 有

$$y_{n+1} - y_N = \sum_{i=N}^{n} \Delta y_i = \sum_{i=N}^{n} \frac{1}{r_i} r_i \Delta y_i \leqslant r_N \Delta y_n \sum_{i=N}^{n} \frac{1}{r_i} \to -\infty.$$

这是一个矛盾. 当(H_2)成立时, 有

$$\begin{aligned} r_{n+1} y_{n+1} - r_N y_N &= \sum_{i=N}^{n} (r_i \Delta y_i + y_{i+1} \Delta r_i) \\ &\leqslant r_N \Delta y_N (n + 1 - N) + \sum_{i=N}^{n} y_{i+1} \Delta r_i \\ &\leqslant r_N \Delta y_N (n + 1 - N) + y_{N+1} \sum_{i=N}^{n} r_{i+1} \to -\infty. \end{aligned}$$

这也是一个矛盾, 证毕.

由引理 5.1.1 和引理 5.1.2 可知 $y_n > \Delta y_{n-1} > 0$. 因此,

$$\begin{aligned} \Delta(r_{n-1} \Delta y_{n-1}) &\leqslant -q_n (y_{n-\sigma} + p_{n-\sigma} y_{n-\tau-\sigma}) \\ &\leqslant -q_n (1 + p_{n-\sigma}) y_{n-\tau-\sigma} \\ &\leqslant -q_n (1 + p_{n-\sigma}) \Delta y_{n-1-\tau-\sigma} \\ &= -\frac{q_n (1 + p_{n-\sigma})}{r_{n-1-\tau-\sigma}} r_{n-1-\tau-\sigma} \Delta y_{n-1-\tau-\sigma}. \end{aligned}$$

定理5.1.1 假设 $0 \leqslant p_n \leqslant p^* < 1$, (H_1)或(H_2)成立,

$$\Delta z_n + \frac{q_n (1 + p_{n-\sigma})}{r_{n-\tau-\sigma-1}} z_{n-\tau-\sigma} \leqslant 0, \tag{5.1.3}$$

无最终正解, 则 (5.1.1) 无最终 ω - 正解.

定义

$$\Gamma_i(n) = \prod_{j=0}^{i-1} p_{n-j\tau}, \quad n \geqslant (i-1)_\tau. \tag{5.1.4}$$

那么, $\Gamma_0(n) = 1$, $\Gamma_1(n) = p_n$, $\Gamma_2(n) = p_n p_{n-\tau}$, $\cdots$.

定理 5.1.2 假设 $0 \leqslant p_n \leqslant p^* < 1$, (H_1)或(H_2)成立且有非负整

数 m 使得

$$\Delta z_{n-1}+q_n\sum_{i=0}^{m}\frac{\Gamma_i(n-\sigma)}{r_{n-1-\sigma-i\tau}}z_{n-1-\sigma-i\tau}\leqslant 0 \tag{5.1.5}$$

无最终正解，则 (5.1.1) 无最终 ω - 正解.

证明 设$\{x_n\}$是(5.1.1)的最终 ω - 正解. $\{y_n\}$由(5.1.2)定义. 由引理 5.1.1 和引理 5.1.2 可知 $y_n>y_{n-1}>0$ 最终成立. 因此，对所有大 n 有

$$\begin{aligned}x_n&=p_nx_{n-\tau}+y_n\\&=p_n(p_{n-\tau}x_{n-2\tau}+y_{n-\tau})+y_n\\&=\Gamma_2(n)x_{n-2\tau}+\Gamma_1(n)y_{n-\tau}+\Gamma_0(n)y_n\\&=\cdots\\&=\sum_{i=0}^{m}\Gamma_i(n)y_{n-i\tau}+\Gamma_{m+1}(n)x_{n-(m+1)\tau}.\end{aligned}$$

于是，我们有

$$\begin{aligned}\Delta(r_{n-1}\Delta y_{n-1})&\leqslant-q_n\sum_{i=0}^{m}\Gamma_i(n-\sigma)y_{n-i\tau-\sigma}\\&\leqslant-q_n\sum_{i=0}^{m}\Gamma_i(n-\sigma)\Delta y_{n-1-i\tau-\sigma}.\end{aligned}$$

令

$$z_n=r_n\Delta y_n,$$

则有(5.1.5)成立. 矛盾. 证毕.

类似地，我们也会有如下结果.

定理 5.1.3 假设 $0\leqslant p_n\leqslant p^*<1$，$(H_1)$或$(H_2)$成立且有非负整数 $0\leqslant m_1<m_2<\cdots<m_k$，使得

$$\Delta z_{n-1}+q_n\sum_{i=1}^{k}\frac{\Gamma_{m_i}(n-\sigma)}{r_{n-1-\sigma-m_i\sigma}}z_{n-1-\sigma-m_i\tau}\leqslant 0,$$

或者

$$\Delta z_{n-1} + q_n \sum_{i=0}^{m} \frac{\Gamma_i(n-\sigma)}{r_{n-1-\sigma-i\tau}} z_{n-1-\sigma} \leqslant 0$$

无最终正解，则(5.1.1)无最终 ω - 正解.

5.1.2　$p_n \leqslant 0$ 的情形

设$\{x_n\}$是(5.1.1)的最终正解. 如果 $p_n \leqslant 0$，$\{y_n\}$ 由(5.1.2)定义，显然有 $y_n > 0$ 最终成立. 类似引理 5.1.2 的证明，如果(H_1)或(H_2)成立，则 Δy_n 最终为正. 于是，定理 5.1.1 至定理 5.1.3 均可应用，但必须考虑到$\{p_n\}$的符号.

设$\{x_n\}$是(5.1.1)的最终正解，$\{y_n\}$是由(5.1.2)定义，则最终有 $y_n > \Delta y_{n-1} > 0$. 因此

$$\begin{aligned} x_n &= y_n + p_n x_{n-\tau} = y_n + p_n y_{n-\tau} + p_n p_{n-\tau} x_{n-2\tau} \\ &\geqslant y_n + p_n y_{n-\tau} \geqslant (1 + p_n) y_{n-\tau}. \end{aligned} \tag{5.1.6}$$

于是，我们有

$$\begin{aligned} \Delta(r_{n-1}\Delta y_{n-1}) &\leqslant - q_n x_{n-\sigma} \leqslant - q_n(1 + p_{n-\sigma}) y_{n-\tau-\sigma} \\ &\leqslant - q_n(1 + p_{n-\sigma}) \Delta y_{n-\tau-\sigma-1}. \end{aligned}$$

令 $z_n = r_{n-1}\Delta y_{n-1}$，则有

$$\Delta z_n + q_n \frac{1 + p_{n-\sigma}}{r_{n-\tau-\sigma-1}} z_{n-\tau-\sigma} \leqslant 0.$$

我们注意到上面的讨论是可能的，类似于(5.1.5)式，我们也有

$$\begin{aligned} x_n &= \sum_{i=0}^{2m+1} \Gamma_i(n) y_{n-i\tau} + \Gamma_{2m+2}(n) x_{n-(2m+2)\tau} \\ &\geqslant y_n + \Gamma_1(n) y_{n-\tau} + \Gamma_3(n) y_{n-3\tau} + \cdots + \Gamma_{2m+1}(n) y_{n-(2m+1)\tau}, \end{aligned}$$

其中 $\Gamma_i(n)$由(5.1.4)定义. 于是，我们有如下结果.

定理 5.1.4　假设 $p_n \leqslant 0$，(H_1)或(H_2)成立且

$$\begin{gathered} 1 + \Gamma_1(n-\sigma) + \cdots + \Gamma_{2j+1}(n-\sigma) \geqslant 0, \\ n \geqslant 2j\tau + \sigma,\ 0 \leqslant j \leqslant m, \end{gathered} \tag{5.1.7}$$

对某一非负整数 m 成立，(5.1.1)有一最终正解，则

$$\Delta z_n + \frac{q_n}{r_{n-(2m+1)\tau-\sigma-1}}\left[1+\sum_{i=0}^{m}\Gamma_{2i+1}(n-\sigma)\right]z_{n-(2m+1)\tau-\sigma}\leqslant 0$$

有最终正解.

5.1.3 $p_n>1$ 的情形

本节中要求 p_n 满足 $\liminf\limits_{n\to\infty}p_n=p_*>1$.

引理 5.1.3 假设 $\liminf\limits_{n\to\infty}p_n=p_*>1$，$\{x_n\}$ 是(5.1.1)的最终正解，则由(5.1.2)定义的 $\{y_n\}$ 最终为负.

证明 假设 $y_n>0$ 最终成立，则

$$x_n=p_nx_{n-\tau}+y_n\geqslant p_nx_{n-\tau}. \tag{5.1.8}$$

即有

$$x_{n-\tau}\leqslant\frac{x_n}{p_n}<x_n.$$

归纳可知

$$x_{n-\tau}<x_n<x_{n+\tau}<\cdots.$$

从而可知，$\{x_n\}$ 是(5.1.1)的 ω – 正解. 对(5.1.8)取下极限，我们有 $p_*\omega\leqslant\omega$. 矛盾. 证毕.

引理 5.1.4 设 $\{x_n\}$ 是(5.1.1)的 ω – 正解，y_n 是最终负的单增序列，p_n 是正的有界数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}r_n\Delta y_n=0$，则

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{i=m}^{\infty}\frac{q_i}{r_{m-1}}<\infty. \tag{5.1.9}$$

证明 设有 N 使得 $n\geqslant N$ 时，$x_n>\frac{\omega}{2}$，$y_n<0$，$\Delta(r_n\Delta y_n)\leqslant 0$，由(5.1.1)可知.

$$r_n\Delta y_n+\frac{\omega}{2}\sum_{i=m}^{n}\leqslant q_i\leqslant r_{m-1}\Delta y_{m-1},\quad n\geqslant m\geqslant N+1.$$

由 $\{r_n\Delta y_n\}$ 的假设，我们有

$$\frac{\omega}{2r_{m-1}}\sum_{i=m}^{n}q_i \leqslant \Delta y_{m-1}, \qquad m \geqslant N+1,$$

$$\frac{\omega}{2}\sum_{m=N+1}^{k}\frac{1}{r_{m-1}}\sum_{i=m}^{\infty}q_i \leqslant y_k - y_N \leqslant -y_N, \quad k \geqslant N+1.$$

取极限可知 (5.1.9) 成立，证毕.

引理 5.1.5 设$\{x_n\}$是(5.1.5) 的 ω - 正解，$\{y_n\}$由(5.1.2) 定义，最终为负，$\{\Delta y_n\}$是常号的，$\{p_n\}$ 是正的有界序列，

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=i}^{\infty}\frac{q_j}{r_{i-1}} = \infty, \tag{5.1.10}$$

(H_1)或(H_2)成立，则 $\{\Delta y_n\}$最终为负.

证明 假设 $\{\Delta y_n\}$ 最终为正，则 $\{r_n\Delta y_n\}$ 是正的单减数列，则或者$\lim\limits_{n\to\infty}r_n\Delta y_n=0$ 或者$\lim\limits_{n\to\infty}r_n y_n=\eta>0$. 如果$\lim\limits_{n\to\infty}r_n\Delta y_n=0$ 成立，由引理 5.1.4 可知结论是事实.

因此，我们可设 $n\geqslant N$ 时 $y_n<0, \Delta y_n>0, r_n\Delta y_n\geqslant\eta$ 这时，如果(H_1)成立，则有

$$y_{n+1}-y_N = \sum_{i=N}^{n}\Delta y_i = \sum_{i=N}^{n}\frac{1}{r_i}r_i\Delta y_i \geqslant r_n\Delta y_n\sum_{i=N}^{n}\frac{1}{r_i} > \eta\sum_{i=N}^{n}\frac{1}{r_i} \to \infty.$$

这是一个矛盾.

如果(H_2)成立，则有

$$\begin{aligned} r_{n+1}y_{n+1} - r_N y_N &= \sum_{i=N}^{n}(r_i\Delta y_i + y_{i+1}\Delta r_i) \\ &\geqslant (n+1-N)r_n\Delta y_n + \sum_{i=N}^{n}y_{i+1}\Delta r_i \\ &\geqslant \eta(n+1-N) + \sum_{i=N}^{n}y_{i+1}(r_{i+1}-r_i) \\ &\geqslant \eta(n+1-N) + y_{N+1}\sum_{i=N}^{n}r_{i+1} \to \infty. \end{aligned}$$

这也是一个矛盾，证毕.

我们已经获得了$\{y_n\}$是负的单减性，于是仍可利用前面的技巧得如下结果.

定理 5.1.5 $\{p_n\}$有界且满足$\liminf\limits_{k\to\infty} p_n = p_* > 1$，(5.1.10)成立，$(H_1)$或$(H_2)$是事实. 如果 (5.1.1)有一个 ω - 正解，则

$$\Delta z_n \geqslant \frac{q_n}{p_{n-\sigma-\tau}r_{n+\tau-\sigma-1}} z_{n-\sigma+\tau} \tag{5.1.11}$$

有最终正解.

证明 设$\{x_n\}$ 是 (5.1.1)的 ω - 正解，由引理 5.1.3 和引理 5.1.5 可知，$\{y_n\}$是最终负的单减数列，因此，$y_n < \Delta y_{n-1} < 0$ 最终成立，注意到

$$x_{n-\tau} = \frac{x_n}{p_n} - \frac{y_n}{p_n} > -\frac{y_n}{p_n}.$$

由(5.1.1) 可知

$$\Delta(r_{n-1}\Delta y_{n-1}) \leqslant -q_n x_{n-\sigma} < q_n \frac{y_{n+\tau-\sigma}}{p_{n+\tau-\sigma}} < \frac{q_n}{p_{n+\tau-\sigma}} \Delta y_{n-1+\tau-\sigma}.$$

因此，$\{-r_{n-1}\Delta y_n\}$ 是 (5.1.11)的最终正解. 证毕.

有关一阶时差分不等式无最终正解的判别定理，我们已在前面给出介绍. 因此，结合前面的知识，可以得到 (5.1.1) 无最终正解或无最终 ω - 正解的判别定理.

§5.2 利用二阶差分方程判别

考虑二阶非线性中立型差分方程

$$\Delta^2(x_n + p_n x_{n-k}) + q_n f(x_{n-l}) = 0, \tag{5.2.1}$$

其中 k 是正整数，l 为非负整数，$\{p_n\}$是实数列，$\{q_n\}$是非负实数列且有正的子列，f 是R 上的非减实函数，且当 $x\neq 0$ 时有 $xf(x)>0$，设$\{x_n\}$ 是(5.2.1)的最终正解，当 $p_n \geqslant 0$ 时，显然

$$z_n = x_n + p_n x_{n-k} \tag{5.2.2}$$

最终为正且满足

$$x_n = z_n - p_n x_{n-k} = z_n - p_n z_{n-k} + p_n p_{n-k} x_{n-2k} \geqslant (1-p_n) z_n.$$

因此我们有如下结果.

定理 5.2.1　如果 $0 \leqslant p_n \leqslant 1$ 且

$$\Delta^2 z_n + q_n f(z_{n-l}) \leqslant 0 \tag{5.2.3}$$

无最终正解，则 (5.2.1) 无最终正解.

事实上，由 $z_n > 0$，$\Delta^2 z_n \leqslant 0$，我们有 $\Delta z_n > 0$. 这时自然有 $x_n \geqslant (1-p_n) z_n$. 代入 (5.2.1)有(5.2.3)成立.

如果 $-1 \leqslant p_n \leqslant 0$ 且(5.2.1)有一个无界最终正解 $\{x_n\}$. 这时如果 $z_n < 0$ 成立，由(5.2.2) 及 p_n 可知

$$x_n \leqslant -p_n x_{n-k} \leqslant x_{n-k}.$$

即知 $\{x_n\}$ 有界，于是有 $z_n > 0$ 最终成立. 注意到 $\Delta^2 z_n \leqslant 0$，于是有 $\Delta z_n > 0$ 最终成立，而 $0 < z_n \leqslant x_n$成立，故有如下结果.

定理 5.2.2　如果 $-1 \leqslant p_n \leqslant 0$ 且 (5.2.3) 无最终正解，则 (5.2.1)无最终无界正解.

§ 5.3　Riccati 技巧

考虑方程

$$\Delta(r_n \Delta(x_n + p_n x_{n-k})) + q_n x_{n-\tau(n)} = 0, \quad n \geqslant 0, \tag{5.3.1}$$

其中$\{r_n\}$是正数列且满足

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r_n} = \infty, \tag{5.3.2}$$

$\{p_n\}$满足 $0 \leqslant p_n \leqslant 1$，$\{q_n\}$ 同 § 5.2 类似，$\{\tau(n)\}_{n=0}^{\infty}$是非增整数值函数满足 $\tau(n) \geqslant -1$ 且$\{n-\tau(n)\}_{n=0}^{\infty}$单增发散到$\infty$.

引理 5.3.1　设$\{x_n\}$ 是(5.3.1)的最终正解. 令

$$z_n = x_n + p_n x_{n-k}, \quad n \geqslant 0.$$

则$\{\Delta z_n\}$最终为正且有

$$\Delta(r_n\Delta z_n)+q_n(1-p_{n-\tau(n)})z_{n-\tau(n)}\leqslant 0. \qquad (5.3.3)$$

证明 由(5.3.1)可知$\Delta(r_n\Delta z_n)\leqslant 0$最终成立. 如果$\{r_n\Delta z_n\}$最终非正，则最终为负. 注意到(5.3.2)，则有$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=-\infty$. 这是一个矛盾. 类似于定理 5.2.1 的证明，有 (5.3.3)成立，证毕.

引理 5.3.2 设$\{x_n\}$ 是 (5,3.1)的最终正解，令

$$w_n=\frac{r_n\Delta z_n}{z_{n-\tau(n)-1}},$$

则最终有

$$\Delta w_n\leqslant -q_n(1-p_{n-\tau(n)})-\frac{w_{n+1}w_n}{r_{n-\tau(n)-1}}. \qquad (5.3.4)$$

证明 由w_n及z_n的定义，我们有

$$\begin{aligned}\Delta w_n&=r_n\Delta z_n\Delta\left\{\frac{1}{z_{n-\tau(n)-1}}\right\}+\frac{1}{z_{n-\tau(n)}}\Delta(r_n\Delta z_n)\\&\leqslant\frac{-r_n\Delta z_n\Delta z_{n-\tau(n)-1}}{z_{n-\tau(n)}z_{n-\tau(n)-1}}-q_n(1-p_{n-\tau(n)})\\&=-w_n\frac{\Delta z_{n-\tau(n)-1}}{z_{n-\tau(n)}}-q_n(1-p_{n-\tau(n)}).\end{aligned}$$

但$\Delta(r_n\Delta z_n)\leqslant 0$，因此由引理 5.3.2 可知

$$\frac{r_{n-\tau(n)-1}\Delta z_{n-\tau(n)-1}}{z_{n-\tau(n)}}\geqslant\frac{r_{n+1}\Delta z_{n+1}}{z_{n-\tau(n)}}\geqslant\frac{r_{n+1}\Delta z_{n+1}}{z_{n-\tau(n+1)}}=w_{n+1}.$$

代入上式,我们有

$$\Delta w_n\leqslant -q_n(1-p_{n-\tau(n)})-\frac{w_{n+1}w_n}{r_{n-\tau(n)-1}}.$$

证毕.

为方便起见，我们令

$$Q_n=q_n(1-p_{n-\tau(n)}).$$

设N足够大使得$n\geqslant N$时$w_n>0$. $n\geqslant s\geqslant N$，从s到n对(5.3.4)求

和，有

$$w_{n+1} - w_s \leqslant - \sum_{i=s}^{n} Q_i - \sum_{i=s}^{n} \frac{w_{i+1} w_i}{r_{i-\tau(i)-1}}. \tag{5.3.5}$$

因此

$$\sum_{i=s}^{n} Q_i \leqslant \sum_{i=s}^{n} Q_i + w_{n+1} \leqslant w_s - \sum_{i=s}^{n} \frac{w_{i+1} w_i}{r_{i-\tau(i)-1}} \leqslant w_s.$$

于是有

$$\sum_{i=s}^{\infty} Q_i < \infty. \tag{5.3.6}$$

定理 5.3.1 如果

$$\sum_{i=s}^{\infty} Q_i = \infty$$

成立，则 (5.3.1)的每一个解振动.

如果(5.3.6) 是事实，我们可令

$$\varphi_k^0 = \sum_{i=k}^{\infty} Q_i, \quad k = 0,1,2\cdots, \tag{5.3.7}$$

自然有 $\varphi_k^0 \leqslant w_k$ 最终成立. 定义

$$\varphi_k^1 = \varphi_k^0 + \sum_{i=k}^{\infty} \frac{\varphi_{i+1}^0 \varphi_i^0}{r_{i-\tau(i)-1}}, \quad k = 0,1,2\cdots,$$

由 (5.3.5) 有

$$\varphi_s^1 = \varphi_s^0 + \sum_{i=s}^{\infty} \frac{\varphi_{i+1}^0 \varphi_i^0}{r_{i-\tau(i)-1}} \leqslant \sum_{i=s}^{\infty} Q_i + \sum_{i=s}^{\infty} \frac{w_{i+1} w_i}{r_{i-\tau(i)-1}}$$
$$\leqslant w_s < \infty, \quad s \geqslant N.$$

归纳定义

$$\varphi_k^{j+1} = \varphi_k^0 + \sum_{i=k}^{\infty} \frac{\varphi_{i+1}^j \varphi_i^j}{r_{i-\tau(i)-1}}, \quad k, j = 0,1,\cdots, \tag{5.3.8}$$

如果 $\varphi_k^j \leqslant w_k$, $k \geqslant N$ 我们有

$$\varphi_s^{j+1} = \varphi_s^0 + \sum_{i=s}^{\infty} \frac{\varphi_{i+1}^j \varphi_i^j}{r_{i-\tau(i)-1}}$$

$$\leqslant \sum_{i=s}^{\infty} Q_i + \sum_{i=s}^{\infty} \frac{w_{i+1}^j w_i^j}{r_{i-\tau(i)-1}} \leqslant w_s^j, \quad s \geqslant N.$$

于是，$j \geqslant 0$，$k \geqslant N$，有 $\varphi_k^j \leqslant w_k$.

定理 5.3.2 如果(5.3.1)有最终正解，则由(5.3.7)和(5.3.8)定义的双标序列满足：

(1) $\varphi_k^j < \infty$ 对 $j \geqslant 0$ 及所有大 k 成立；

(2) $\limsup_{j\to\infty} \varphi_k^j < \infty$ 对所有大 k 成立.

如果 $\tau(n) \equiv \tau$，(5.3.1)变为

$$\Delta(r_n \Delta(x_n + p_n x_{n-k})) + q_n x_{n-\tau} = 0, \quad n \geqslant 0. \tag{5.3.9}$$

定理 5.3.3 设

$$\Gamma_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{r_i}, \quad n \geqslant 1, \tag{5.3.10}$$

且有 $\beta > \frac{1}{4}$ 使得

$$\Gamma_{n-\tau-1} \sum_{i=n}^{\infty} Q_i \geqslant \beta \tag{5.3.11}$$

最终成立，则(5.3.9)振动.

证明 由(5.3.11)和(5.3.7)可知

$$\varphi_n^0 = \sum_{i=n}^{\infty} Q_i \geqslant \frac{\beta}{\Gamma_{n-1-\tau}}.$$

因此

$$\varphi_n^1 = \varphi_n^0 + \sum_{i=n}^{\infty} \frac{\varphi_{i+1}^0 \varphi_i^0}{r_{i-\tau-1}} \geqslant \frac{\beta}{\Gamma_{n-\tau-1}} + \beta^2 \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{r_{i-\tau-1} \Gamma_{i-\tau-1} \Gamma_{i-\tau}}$$

$$\geqslant \frac{\beta}{\Gamma_{n-\tau-1}} + \beta^2 \sum_{i=n}^{\infty} \left(\frac{1}{\Gamma_{i-\tau-1}} - \frac{1}{\Gamma_{i-\tau}} \right) = \frac{\beta + \beta^2}{\Gamma_{n-\tau-1}} = \frac{\beta_1}{\Gamma_{n-\tau-1}},$$

其中 $\beta_1 = \beta + \beta^2$. 归纳可证明 $\varphi_n^j \geqslant \frac{\beta_j}{\Gamma_{n-\tau-1}}$，其中 $\beta_j = \beta + \beta_{j-1}^2$，$j = 1, 2, \cdots$. 显然 $\beta = \beta_0 < \beta_1 < \beta_2 < \cdots$，如果 β_j 收敛于某正数 α，则有 $\alpha = \beta_0$

$+\alpha^2$. 注意到 $\beta>\frac{1}{4}$. 因此，这是不可能的. 从而有 $\lim\limits_{j\to\infty}\beta_j=\infty$. 证毕.

§ 5.4　非振动解的渐近性

本节中将考虑线性方程

$$\Delta^2(x_{n-1}+p_{n-1}x_{n-1-k})+q_nx_{n-l}=0 \tag{5.4.1}$$

非振动解的渐近性,其中 $\{p_n\}$ 是实数列，$\{q_n\}$ 与 § 5.2 中类似, k 和 l 是非负整数.

定理 5.4.1　如果

$$\sum_{n=0}^{\infty}q_n=\infty, \tag{5.4.2}$$

且有 $p_1>-1$ 使得

$$-1<p_1\leqslant p_n\leqslant 0. \tag{5.4.3}$$

则 (5.4.1)的非振动解 $\{x_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

证明　不妨设 $\{x_n\}$ 是 (5.4.1)的最终正解. 令

$$z_n=x_n+p_nx_{n-k},$$

则最终有 $\Delta z_n>0$. 否则，由(5.4.2)可知有 $\alpha>0$ 和 N 使得 $n\geqslant N$ 时 $\Delta z_n<-\alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=-\infty$. 因为 $p_1>-1$，于是

$$x_n<-p_nx_{n-k}\leqslant -p_1x_{n-k}\leqslant x_{n-k}.$$

从而可知 $\{x_n\}$ 有界. 这是一个矛盾. 令 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=L\geqslant 0$. 由 n 到 ∞ 对 (5.4.1) 求和，则有

$$\Delta z_{n-1}=L+\sum_{i=n}^{\infty}q_ix_{i-l}.$$

由(5.4.2)可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\inf x_n=0$. 如果 $L>0$，则有 $x_n>z_n\to\infty$, 矛盾. 因此 $L=0$. 最后证明 $z_n<0$ 成立. 否则有 $\alpha>0$ 使得 $z_n>\alpha$ 最终成立. 这也可导致与 $\lim\limits_{n\to\infty}\inf x_n=0$ 矛盾. $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=0$ 是显然的. 归纳前面的证

明,我们有

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \Delta z_n = 0,\ z_n < 0,\ \Delta z_n > 0.$$

因此有

$$x_n < -p_n x_{n-k} \leqslant -p_1 x_{n-k}.$$

归纳有 $x_{n+mk} \leqslant (-p)^m y_n$. 证毕.

定理 5.4.2 如果 $p_n \geqslant 0$, 则(5.4.1)的非振动解 $\{x_n\}$ 满足, $|x_n| \leqslant cn$,其中 c 是某正常数, 且如果 $\left\{\frac{n}{p_n}\right\}$ 有界, 则 $\{x_n\}$ 有界;如果 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{p_n}=0$, 则 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

证明 设有 N 使得 $n \geqslant N$ 时, $x_{n-k}>0, x_{n-l}>0$, 由 (5.4.1)可知 $n\geqslant N$ 时 $\Delta^2 z_{n-1} \leqslant 0$. 从 $N+1$ 到 n 求和, 我们有

$$z_{n+1} \leqslant z_{N+1} + (n-N)\Delta z_N.$$

于是有 $c>0$ 使得 $z_n \leqslant cn$. 注意到 $p_n \geqslant 0$, 即有 $x_n \leqslant cn$. 而 $p_n x_{n-k} \leqslant cn$, 故 $\left\{\frac{n}{p_n}\right\}$ 有界时 $\{x_n\}$ 有界, $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{p_n}=0$ 时 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. 证毕.

例 5.4.1 差分方程

$$\Delta^2(x_{n-1} - e^{-(k-1)} x_{n-1-k}) + (e-1)^3 e^{l-1} x_{n-l} = 0$$

满足定理 5.4.1 的条件, 因此它的所有非振动解趋于零. 事实上, $x_n = e^{-n}$是它的解.

§ 5.5 非振动解的渐近分类

考虑非线性中立型差分方程

$$\Delta(r_n \Delta(x_n - p_n x_{n-\tau})) + f(n, x_{n-\sigma}) = 0, \quad n \geqslant 0, \tag{5.5.1}$$

其中 τ 是正整数, σ 是非负整数, $\{r_n\}$ 是正数列, $\{p_n\}$ 是实数列满足 $0 \leqslant p_n \leqslant p < 1$, f 是 $\mathbf{N}\times\mathbf{R}$ 上的实值函数关于第二变量连续且当 $x \neq 0, n \geqslant 0$ 时 $xf(n,x) > 0$.

如下的条件在后边的叙述中可能用到：

(H_1) $n\geqslant 0$，$0\leqslant p_n\leqslant p<1$；

(H_2) $\lim\limits_{n\to\infty}p_n=p^*\in[0,1)$；

(H_3) $n,m\geqslant 0$，$|p_n-p_m|\leqslant k|n-m|$；

(H_4) $n\geqslant 0$，$f(n,x)$ 当 $x\in(0,\infty)$时非减；

(H_5) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r_k}$有限；

(H_6) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r_k}$无限；

(H_7) $\{r_n\}$ 非减．

为方便起见，我们引入记号

$$\Gamma_n(m)=\sum_{k=m}^{n-1}\frac{1}{r_k},$$

$$\Gamma(m)=\sum_{k=m}^{\infty}\frac{1}{r_k}$$

同时，如果$\{x_n\}$是(5.5.1)的一个解，我们引入伴随序列$\{y_n\}$，

$$y_n=x_n-p_nx_{n-\tau},\quad n\geqslant 0. \tag{5.5.2}$$

5.5.1 基本结果

先给出一些基本事实，它们将对后边的结果有帮助．

引理 5.5.1 $\{H_1\}$成立，$\{x_n\}$ 是正数列，$\{y_n\}$ 由(5.5.2)定义，则如下结果成立：

(i) 如果$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\infty$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$；

(ii) 如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$；

(iii) 如果$\lim\limits_{n\to\infty}p_n=p^*\in[0,1)$，且$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a\in(-\infty,\infty)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{a}{(1-p^*)}$．

证明 由 $y_n\leqslant x_n$ 可知(i)和(ii)是事实．下边证明(iii)成立．首

先可证$\{x_n\}$有界. 否则,有子列$\{x_{n_k}\}$使得

$$x_{n_k}=\max_{0\le n\le n_k}x_n,\quad \lim_{k\to\infty}x_{n_k}=\infty.$$

而 $y_{n_k}=x_{n_k}-p_{n_k}x_{n_k-\tau}\geqslant x_{n_k}(1-p)$, 于是$\lim\limits_{k\to\infty}y_{n_k}=\infty$. 这是一个矛盾. 从而有$\{n_i\}$ 和$\{n_j\}$ 使得

$$\lim_{i\to\infty}x_{n_i}=\liminf_{n\to\infty}x_n=\alpha,\quad \lim_{j\to\infty}x_{n_j}=\limsup_{n\to\infty}x_n=\beta.$$

那么

$$\begin{aligned}\alpha&=\lim_{j\to\infty}y_{n_j}=\lim_{j\to\infty}(x_{n_j}-p_{n_j}x_{n_j-\tau})\\&\geqslant\limsup_{n\to\infty}x_n(1-\lim_{j\to\infty}p_{n_j})=\beta(1-p^*).\end{aligned}$$

即有 $\beta\leqslant\dfrac{\alpha}{(1-p^*)}$. 类似可证 $\alpha\geqslant\dfrac{\alpha}{(1-p^*)}$. 证毕.

如果$\{x_n\}$是(5.5.1)的最终正解,由(5.5.1)可知 $\Delta(r_n\Delta y_n)<0$ 最终成立. 于是$\{y_n\}$和$\{\Delta y_n\}$是常号的. 这时会有四种可能:

$$x_n>0,\quad y_n>0,\quad \Delta y_n>0;$$

$$x_n>0,\quad y_n>0,\quad \Delta y_n<0;$$

$$x_n>0,\quad y_n<0,\quad \Delta y_n>0$$

和

$$x_n>0,\quad y_n<0,\quad \Delta y_n<0.$$

引理 5.5.2 设$\{x_n\}$是 (5.5.1) 的最终正解且$\{\Delta y_n\}$最终为负或 $\limsup\limits_{n\to\infty}x_n>0$, 则$\{y_n\}$最终为正.

证明 如果有 N 使得$n\geqslant N$时 $\Delta y_n<0, y_n<0$, 归纳可知

$$\begin{aligned}x_{j\tau+N}&=y_{j\tau+N}+p_{j\tau+N}x_{(j-1)\tau+N}\leqslant y_N+x_{(j-1)\tau+N}\\&\leqslant\cdots\leqslant jy_N+x_N,\quad j=1,2,\cdots.\end{aligned}$$

当 j 充分大时, 不难看出 $jy_n+x_N<0$ 这矛盾于 $x_{j\tau+N}>0$.

如果$\limsup\limits_{n\to\infty}x_n>0$,并设 $\Delta y_n>0$ 和 $y_n<0$ 最终成立, 则$\{x_n\}$不会是无界的. 否则, 有$\{n_k\}$使得

$$x_{n_k} = \max_{0\le n\le n_k} x_n, \quad \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \infty.$$

而

$$y_{n_k} = x_{n_k} - p_{n_k} x_{n_k - \tau} \geqslant x_{n_k}(1-p).$$

故

$$\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = \infty.$$

矛盾.设有子列$\{n_k\}$使得

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \limsup_{n\to\infty} x_n = x^* > 0.$$

而

$$0 \geqslant \lim_{k\to\infty} y_{n_k} \geqslant x^*(1-p) > 0.$$

这也是一个矛盾.证毕.

引理 5.5.3 如果$\Gamma(0)=\infty$，$\{x_n\}$是(5.5.1)的最终正解，则$\Delta y_n>0$最终成立.如果再附加条件$\{x_n\}$收敛于零，则$y_n<0$最终成立.

证明 由(5.5.1)可知$\Delta(r_n\Delta y_n)<0$.如果$\Delta y_n<0$成立，由引理5.5.2知$y_n>0$.

设有N使得$n\geqslant N$时$y_n>0$，$\Delta y_n>0$，$\Delta(r_n\Delta y_n)<0$.那么

$$y_{n+1} - y_N = \sum_{i=N}^{n} \Delta y_i = \sum_{i=N}^{n} \frac{1}{r_i} r_i \Delta y_i \leqslant r_N \Delta y_N \sum_{i=N}^{n} \frac{1}{r_i} \to -\infty.$$

这是一个矛盾.

如果$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$,由引理5.5.1知$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$.这时假设$y_n>0$,则$\{y_n\}$是单增正数列,它不可能收敛于零.于是有$y_n<0$.证毕.

5.5.2 非振动解的分类

设$\{x_n\}$是(5.5.1)的最终正解,$\{y_n\}$由(5.2.2)定义，由(5.5.1)可知

$$\Delta y_j = \frac{r_N \Delta y_N}{r_j} - \frac{1}{r_j}\sum_{i=N}^{j-1} f(i, x_{i-\sigma}),$$

$$y_n = y_N + r_N\Delta y_N\sum_{j=N}^{n-1}\frac{1}{r_j} - \sum_{l=N}^{n-1}\sum_{i=N}^{l-1}\frac{f(i,x_{i-\sigma})}{r_l}$$
$$\leqslant y_N + r_N\Delta y_N\sum_{j=N}^{n-1}\frac{1}{r_j}$$
$$= y_N + r_N\Delta y_N\Gamma_n(N)$$
$$\leqslant y_N + r_N\Delta y_N\Gamma(0). \tag{5.5.3}$$

因此，当 $\Gamma(0)<\infty$ 时有 $\{y_n\}$ 有界. 注意到 $\{y_n\}$ 的单调性，可知 $\{y_n\}$ 收敛.

引理 5.5.4 设 $\Gamma(0)<\infty$，$\{x_n\}$ 是(5.5.1)的最终正解. 则有正数 α 和 β 使得

$$\alpha\Gamma(n)\leqslant y_n\leqslant\beta \quad 或 \quad -\beta\leqslant y_n\leqslant-\alpha\Gamma(n)$$

最终成立.

证明 由前可知 $\{x_n\}$ 有四种可能. 如果 $y_n>0$，$\Delta y_n>0$ 由(5.5.3)可知 $\{y_n\}$ 是单增有上界数列. 即有 $\beta>0$ 使得 $y_n\leqslant\beta$. 有 $\alpha>0$ 使 $y_n>\alpha\Gamma(0)$ 是显然的. 而 $\alpha\Gamma(n)<\alpha\Gamma(0)$，于是有 $\alpha\Gamma(n)\leqslant y_n$.

如果 $y_n>0$，$\Delta y_n<0$，$\{y_n\}$ 有上界是显然的. 令 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y_*$，注意到 (5.5.3) 则有 $y_n\geqslant y_*-(r_N\Delta y_N)\Gamma(N)$. 由 $\{r_i\Delta y_i\}$ 的单调性可知，当 $n\geqslant N$ 时有 $y_n\geqslant-(r_N\Delta y_N)\Gamma(N)$.

其它两种情况类似可证. 证毕.

引理 5.5.5 设 $\Gamma(0)=\infty$，$\{x_n\}$ 是(5.5.1)的最终正解并满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup x_n>0$. 则有正数 α 和 β 使得

$$\alpha\leqslant y_n\leqslant\beta\Gamma_n(N).$$

证明 由引理 5.5.2 可知 $y_n>0$，再由引理 5.5.3 有 $\Delta y>0$. 这时自然有 $y_n\geqslant\alpha$. 注意到 (5.5.3) 及 $\Gamma(0)=\infty$，则有 $\beta>0$ 使得 $y_n\leqslant\beta\Gamma_n(N)$. 证毕.

记 Ω 为(5.5.1)所有最终正解集并记

$$\Omega(\alpha,\beta,\gamma)=\{\{x_n\}\in\Omega\mid x_n\to\alpha, y_n\to\beta, r_n\Delta y_n\to\gamma, n\to\infty\}.$$

定理 5.5.1　假设 $\Gamma(0)<\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}p_n=p^*\in[0,1)$. 则(5.5.1)的最终正解属下列四类之一:

$$\Omega\left(\frac{a}{1-p^*},a,c\right),\Omega\left(\frac{a}{1-p^*},a,-\infty\right),\Omega(0,0,d),\Omega(0,0,-\infty).$$

其中 a,b,d 是有限数.

证明　设 $\{x_n\}$ 是 (5.5.1) 的最终正解, 由引理 5.5.4 可知 $\{y_n\}$ 单调有界. 即 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$. 由引理 5.5.1 知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{a}{1-p^*}$. 由 $\{x_n\}$ 的正性可知 $a\geqslant0$. 由 $\{r_n\Delta y_n\}$ 的单调性可知它收敛于某一常数或 $-\infty$. 证毕.

由定理 5.5.1 的证明不难看出, 定理 5.5.1 中的 a 是正常数. 而 $d\neq0$. 事实上, 由 Stolz 定理可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{\Gamma(n)}=-\lim_{n\to\infty}r_n\Delta y_n=-d.$$

如果 $\{y_n\}$ 最终为正, 由引理 5.5.4 可知 $\dfrac{y_n}{\Gamma(n)}\geqslant\alpha>0$. 于是有 $-d\geqslant\alpha>0$. 如果 $\{y_n\}$ 最终为负, 类似地有 $-d\leqslant\alpha<0$.

定理 5.5.2　假设 $\Gamma(0)=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}p_n=p^*\in[0,1)$, 则(5.5.1)的最终正解属下列五类之一:

$$\Omega(0,0,0),\quad \Omega(0,0,c),\quad \Omega\left(\frac{a}{i-p^*},a,0\right),$$
$$\Omega(\infty,\infty,c),\quad \Omega(\infty,\infty,0),$$

其中 a 和 c 是正常数

证明　如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup x_n=0$, 由引理 5.5.1 和引理 5.5.3 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$ 且 $\Delta y_n>0$. 因此, $\{r_n\Delta y_n\}$ 是正的单减数列, 它收敛于非负常数 c. 故 $\{x_n\}$ 属于 $\Omega(0,0,0)$ 或 $\Omega(0,0,c)$.

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup x_n>0$ 由引理 5.5.5 可知 $\{y_n\}$ 是最终单增正数列. 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}r_n\Delta y_n=c$ 或者 $\lim\limits_{n\to\infty}r_n\Delta y_n=0$. 如果

$\lim_{n\to\infty} y_n = a$，则 $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{a}{i-p^*} > 0$，$\{x_n\}$ 属于 $\Omega\left(\frac{a}{(1-p^*)}, a, 0\right)$. 如果 $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$，由引理 5.5.1 知 $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$. 证毕.

5.5.3　充要条件

本节中将给出一些类型解存在的充要条件.

定理 5.5.3　假设(H_4)和(H_5)成立，方程(5.5.1)有一个解属于 $\Omega(0,0,d)$，则有某正数 $\lambda>0$ 使得

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n, \lambda\Gamma(n-\sigma)) < \infty. \tag{5.5.4}$$

如果附加条件

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma(n-\tau)}{\Gamma(n)} = 1, \tag{5.5.5}$$

则逆也成立.

证明　设 $\{x_n\} \in \Omega(0,0,d)$ 是 (5.5.1) 的解. 即有

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} r_n \Delta y_n = d.$$

不失一般性，可设 $d<0, y_n>0$. λ_1 和 λ_2 是正数使得

$$-\lambda_1 \leqslant r_n \Delta y_n \leqslant -\lambda_2.$$

那么

$$-\lambda_1 \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{r_k} \leqslant y_m - y_n \leqslant -\lambda_2 \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{r_k}.$$

让 $m\to\infty$，有

$$-\lambda_1 \Gamma(n) < -y_n < -\lambda_2 \Gamma(n).$$

从而

$$f(i, x_{i-\sigma}) \geqslant f(i, y_{i-\sigma}) \geqslant f(i, \lambda_2 \Gamma(i-\sigma)).$$

另一方面，由(5.5.1)有

$$r_n \Delta y_n = r_k \Delta y_k - \sum_{i=k}^{n-1} f(i, x_{i-\sigma}).$$

取极限，则有

$$\infty > -d + r_k\Delta y_k = \sum_{i=k}^{\infty} f(i, x_{i-\sigma}) \geqslant \sum_{i=k}^{\infty} f(i, \lambda_2\Gamma(i-\sigma)).$$

相反，选择 $\mu\in(p,1)$和 $N\geqslant 0$ 使得

$$p_n \frac{\Gamma(n-\tau)}{\Gamma(n)} \leqslant \mu, \quad n \geqslant N,$$

$$\sum_{k=N}^{\infty} f(k, \lambda\Gamma(k-\sigma)) \leqslant \frac{\lambda}{2}(1-\mu).$$

考虑方程

$$x_n = p_n x_{n-\tau} + \Gamma(n)\left\{\frac{\lambda(1-\mu)}{2} + \sum_{k=N}^{n-1} f(k, x_{k-\sigma})\right\}$$

$$+ \sum_{k=n}^{\infty} \Gamma(k+1) f(k, x_{k-\sigma}), n \geqslant N + \max\{\sigma, \tau\}. \quad (5.5.6)$$

容易看出，(5.5.6) 的一个解也是 (5.5.1) 的一个解. 确实

$$\begin{aligned}
\Delta y_n &= \Delta(x_n - y_n x_{n-\tau}) \\
&= \frac{\lambda(1-\mu)}{2}\Delta\Gamma(n) + \Delta\Gamma(n)\sum_{k=N}^{n-1} f(k, x_{k-\sigma}) \\
&\quad + \Gamma(n+1)\Delta\left\{\sum_{k=N}^{n-1} f(k, x_{k-\sigma})\right\} - \Delta\left\{\sum_{k=n}^{\infty}\Gamma(k+1) f(k, x_{k-\sigma})\right\}. \\
&= -\frac{\lambda(1-\mu)}{2r_n} - \frac{1}{r_n}\sum_{k=N}^{n-1} f(k, x_{k-\sigma}).
\end{aligned}$$

于是

$$r_n\Delta y_n = -\frac{\lambda(1-\mu)}{2} - \sum_{k=N}^{n-1} f(k, x_{k-\sigma}), \quad (5.5.7)$$

$$\Delta(r_n\Delta y_n) = -f(n, x_{n-\sigma}).$$

下证(5.5.6)有一个解属于 $\Omega(0,0,d)$. 为此我们定义

$$x_n^{(1)} = 0, \quad n \geqslant N,$$

$$x_n^{(i+1)} = (Fx^{(i)})_n, \quad n \geqslant N, \quad i = 1,2,3\cdots,$$

其中

$$(Fx)_n = p_n x_{n-\tau} + \Gamma(n)\left\{\frac{\lambda(1-\mu)}{2} + \sum_{k=N}^{n-1} f(k, x_{k-\sigma})\right\}$$

$$+ \sum_{k=n}^{\infty}\Gamma(k+1)f(k, x_{k-\sigma}), \quad n \geqslant N + \max(\tau, \sigma),$$

$$(Fx)_n = (Fx)_{N+\max(\tau,\sigma)}, \quad N \leqslant n < N + \max(\tau, \sigma)$$

由(H_4)可见

$$0 \leqslant x_n^{(i)} \leqslant x_n^{(i+1)}, \quad n \geqslant N, \quad i = 1, 2, \cdots.$$

另外

$$x_n^{(2)} = (Fx^{(1)})_n = \frac{\lambda(1-\mu)}{2}\Gamma(n) \leqslant \lambda\Gamma(n) < \infty, \quad n \geqslant N.$$

归纳可知

$$x_n^{(i+1)} \leqslant p_n \lambda\Gamma(n-\tau) + \Gamma(n)\frac{\lambda(1-\mu)}{2} + \Gamma(n)\sum_{k=N}^{\infty} f(k, \lambda\Gamma(k-\sigma))$$

$$\leqslant \lambda\Gamma(n)\left(\mu + \frac{1-\mu}{2} + \frac{1}{\lambda}\right)\sum_{k=N}^{\infty} f(k, \lambda\Gamma(k-\sigma))\Big)$$

$$= \lambda\Gamma(n)\left(\frac{1-\mu}{2} + \frac{1}{\lambda}\sum_{k=N}^{\infty} f(k, \lambda\Gamma(k-\sigma))\right) \leqslant \lambda\Gamma(n).$$

由 Lebesgue 控制收敛定理可见 $Fx = x$. 显然 $\{x_n\}$ 满足 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$. 最后, 由(5.5.7)可见

$$-\frac{\lambda(1-\mu)}{2} > r_n \Delta y_n = -\frac{\lambda(1-\mu)}{2} - \sum_{k=N}^{n-1} f(k, x_{k-\sigma})$$

$$> -\frac{\lambda(1-\mu)}{2} - \frac{\lambda(1-\mu)}{2} = -\lambda(1-\mu).$$

因此, $\lim_{n\to\infty} r_n \Delta y_n = d < 0$. 证毕.

定理 5.5.4 假设(H_2),(H_4)和(H_5)成立, 则方程(5.5.1)有属于 $\Omega\left(\frac{a}{(1-p^*)}, a, c\right)$ 或 $\Omega\left(\frac{a}{(1-p^*)}, a, -\infty\right)$ 的最终正解当且仅当

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{r_k}\sum_{i=0}^{k-1} f(i, \lambda) < \infty, \quad \lambda > 0.$$

证明 设$\{x_n\}$是(5.5.1)的最终正解且满足

$$\lim_{n\to\infty}x_n = \frac{a}{1-p^*}, \quad \lim_{n\to\infty}y_n = a, \quad \lim_{n\to\infty}r_n\Delta y_n = c(\text{或} -\infty).$$

则有正数 λ_1 和 λ_2 使得 $\lambda_1\leqslant y_n\leqslant\lambda_2$. 由 (5.5.3) 有

$$y_n = y_N + r_N\Delta y_N\sum_{i=N}^{n-1}\frac{1}{r_i} - \sum_{i=N}^{n-1}\frac{1}{r_i}\sum_{k=N}^{i-1}f(k,x_{k-\sigma}).$$

取极限, 则有

$$a - y_N - r_N\Delta y_N\Gamma(N) = \sum_{i=N}^{\infty}\frac{1}{r_i}\sum_{k=N}^{i-1}f(k,x_{k-\sigma}) \geqslant \sum_{i=N}^{\infty}\frac{1}{r_i}\sum_{k=N}^{i-1}f(k,\lambda_1).$$

为了证明逆成立,设 m 足够大使得

$$\sum_{k=m}^{\infty}\frac{1}{r_k}\sum_{i=m}^{k-1}f(i,\lambda) < \frac{(1-p)\lambda}{2}.$$

记 l_m^∞是所有实数列$\{x_n\}_{n=m}^{\infty}$组成的 Banach 空间.

$$M = \left\{x = \{x_n\} \in l_m^\infty \mid (1-p)\frac{\lambda}{2} \leqslant x_n \leqslant \lambda, \quad n \geqslant m\right\}.$$

定义算子

$$(Fx)_n = p_n x_{n-\tau} + \frac{(1-p)\lambda}{2} + \sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{r_k}\sum_{i=m}^{k-1}f(i,x_{i-\tau}),$$

$$n \geqslant m + \max\{k,\sigma\},$$

$$(Fx)_n = (Fx)_{m+\max\{\tau,\sigma\}}, \qquad m \leqslant n < m + \max\{\tau,\sigma\}.$$

对于 $x_n\in M$, $(Fx)_n\geqslant\frac{(1-p)\lambda}{2}$是显然的,而

$$(Fx)_n\leqslant p\lambda + \frac{(1-p)\lambda}{2} + \sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{r_k}\sum_{i=m}^{k-1}f(i,\lambda)$$

$$\leqslant \lambda\left(p + \frac{1-p}{2} + \frac{1-p}{2}\right) = \lambda.$$

即有 $FM\subseteq M$. 如果 $x\leqslant y$, 由 f 的单调性自然有 $Fx\leqslant Fy$. 这样,由 Knaster 不动点定理可知 F 在 M 上有不动点 x. 它显然也是 (5.5.1) 的正解. 另外,

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - p_n x_{n-\tau}) = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(1-p)\lambda}{2} + \sum_{k=n}^{\infty} r_k \sum_{i=m}^{k-1} f(i, x_{i-\sigma})\right\}$$
$$= \frac{(1-p)\lambda}{2},$$

并由引理 5.5.1 可知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{(1-p)\lambda}{2} \cdot \frac{1}{1-p^*}$. 证毕.

定理 5.5.5 假设(H_2),(H_4)和(H_6)成立,则(5.5.1)有解属于 $\Omega(\frac{a}{(1-p^*)}, a, 0)$ 当且仅当

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r_k} \sum_{i=k}^{\infty} f(i, \lambda) < \infty, \quad \lambda > 0.$$

证明 设$\{x_n\}$是 (5.5.1) 的最终正解并满足

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{a}{1-p^*}, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} r_n y_n = 0.$$

则有正数 c_1 和 c_2 使得 $c_1 \leqslant y_n \leqslant c_2$. 那么

$$f(n, x_{n-\sigma}) \geqslant f(n, y_{n-\sigma}) \geqslant f(n, c_1).$$

对(5.5.1)从 m 到∞求和, 则有

$$r_m \Delta y_m = \sum_{i=m}^{\infty} f(i, x_{i-\sigma}), \quad m \geqslant 0.$$

即有

$$y_n = y_m + \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{r_k} \sum_{i=k}^{\infty} f(i, x_{i-\sigma}).$$

于是

$$\sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{r_k} \sum_{i=k}^{\infty} f(i, c_1) \leqslant \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{r_k} \sum_{i=k}^{\infty} f(i, x_{i-\sigma}) = a - y_N < \infty.$$

为证其逆成立, 设 N 使得

$$\sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{r_k} \sum_{i=k}^{\infty} f(i, \lambda) < \frac{(1-p)\lambda}{2}.$$

l_N^∞ 和M 如前定义. 定义算子

$$(Fx)_n = p_n x_{n-\tau} + \frac{(1-p)\lambda}{2} + \sum_{k=N}^{n-1}\frac{1}{r_k}\sum_{i=k}^{\infty}f(i, x_{i-\sigma}),$$
$$n \geqslant N + \max\{\tau, \sigma\}.$$
$$(Fx)_n = (Fx)_{N+\max\{\tau,\sigma\}}, \quad N \leqslant n < N + \max\{\tau, \sigma\}.$$

类似定理 5.5.4 证明可知 F 在M 有不动点x. 而

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - p_n x_{n-\tau}) = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(1-p)\lambda}{2} + \sum_{k=N}^{n-1}\frac{1}{r_k}\sum_{i=k}^{\infty}f(i, x_{i-\sigma})\right\}$$

存在且属于

$(\frac{(1-p)\lambda}{2},(1-p)\lambda)$, 不妨设为 a, 由引理 5.5.1 可知

$$\lim_{n\to\infty}x_n = \frac{a}{1-p^*}.$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n\Delta y_n = 0$ 则是显然的. 证毕 .

定理 5.5.6 假设(H_2),(H_4)和(H_6)成立, 则 (5.5.1)有解属于 $\Omega(\infty, \infty, c)$ 当且仅当

$$\sum_{k=0}^{\infty}f(k, \lambda\Gamma_{k-\sigma}(0)) < \infty, \quad \lambda > 0.$$

证明 设$\{x_n\}$是 (5.5.1)的最终正解且满足

$$\lim_{n\to\infty}x_n = \infty, \quad \lim_{n\to\infty}y_n = \infty, \quad \lim_{n\to\infty}r_n\Delta y_n = c > 0.$$

注意到 $r_n\Delta y_n$ 的单减性, 则有 $r_n\Delta y_n \geqslant c$. 于是

$$y_n \geqslant y_N + c\sum_{k=N}^{n-1}\frac{1}{r_k} = y_N + c\Gamma_n(N).$$

因此, 有 $\lambda > 0$ 使得 $y_n \geqslant \lambda\Gamma_n(N)$. 由$(H_4)$可知

$$f(n, \lambda\Gamma_{n-\sigma}(N)) \leqslant f(n, y_{n-\sigma}) \leqslant f(n, x_{n-\sigma}).$$

由(5.5.1)可知

$$r_K\Delta y_K - c = \sum_{k=K}^{\infty}f(k, x_{k-\sigma}) \geqslant \sum_{k=K}^{\infty}f(k, \lambda\Gamma_{k-\sigma}(N)).$$

为证其逆命题成立, 设有 N 使得

$$\sum_{k=N}^{\infty} f(k,\Gamma_{k-\sigma}(0)) < \frac{(1-p)\lambda}{2}.$$

在 l_N^∞ 上定义范数

$$\|x\| = \sup_{n\geq N} \frac{|x_n|}{\Gamma_n(0)}.$$

$$M = \{x = \{x_n\} \in l_N^\infty \mid (1-p)\lambda\Gamma_n(0)/2 \leqslant x_n \leqslant \lambda\Gamma_n(0), n \geqslant N\}.$$

定义算子

$$(Fx)_n = p_n x_{n-\sigma} + \frac{\lambda(1-p)\Gamma_n(0)}{2} + \sum_{k=N}^{n-1}\Gamma_k(0)f(k-1,x_{k-1-\sigma}) + \Gamma_n(0)\sum_{k=n}^{\infty} f(k-1,x_{k-1-\sigma}), \quad n > N + \max\{\tau,\sigma\},$$

$$(Fx)_n = (Fx)_{N+1}, \quad N \leqslant n \leqslant N + \max\{\tau,\sigma\}.$$

类似定理 5.5.4 的证明，可知 F 有不动点 x，显然 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$. 证毕.

5.5.4 充分条件

本节中将给出两个充分性结果.

定理 5.5.7 假设 (H_4) 和 (H_6)成立且

$$\sum_{k=N+\sigma}^{\infty} \Gamma_k(0)f(k,\lambda_1\Gamma_{k-\sigma}(N)) = \infty,$$

$$\sum_{k=N+\sigma}^{\infty} f(k,\lambda_2\Gamma_{k-\sigma}(N)) < \infty,$$

则(5.5.1)有解属于 $\Omega(\infty,\infty,0)$，其中 λ_1 和 λ_2 是正常数.

证明 设有 $N_2 \geqslant N + \max\{\tau,\sigma\}$使得

$$\frac{\lambda_1}{\Gamma_n(N)} + \lambda_2 p_n + \sum_{k=N_2}^{\infty} f(k-1,\lambda_2\Gamma_{k-\sigma-1}(N)) < \lambda_2.$$

定义算子

$$(Fx)_n = \frac{\lambda_1}{\Gamma_n(N)} + \frac{\Gamma_{n-\tau}(N)}{\Gamma_n(N)} p_n x_{n-\tau}$$
$$+ \frac{1}{\Gamma_n(N)} \sum_{k=N}^{n-1} \Gamma_k(N) f(k-1, \Gamma_{k-\sigma-1}(N) x_{k-1-\sigma})$$
$$+ \sum_{k=n}^{\infty} f(k-1, \Gamma_{k-1-\sigma}(N) x_{k-1-\sigma}), \quad n \geqslant N_2,$$
$$(Fx)_n = (Fx)_{N_2}, \quad N \leqslant n \leqslant N_2. \tag{5.5.8}$$

令 $x_n^{(1)} = 0, x_n^{(i+1)} = (Fx^{(i)})_n, n \geqslant N$. 由 (H_4) 可见

$$0 \leqslant x_n^{(i)} \leqslant x_n^{(i+1)}, \quad n \geqslant N, \quad i = 1, 2, \cdots,$$

另外

$$x_n^{(2)} = (Fx^{(1)})_n = \frac{\lambda_1}{\Gamma_n N} < \lambda_2, \quad n \geqslant N.$$

归纳可证

$$x_n^{(i+1)} \leqslant \lambda_2 \left\{ \frac{\lambda_1}{\lambda_2 \Gamma_n(N)} + p_n + \frac{1}{\lambda_2} \sum_{k=N_2}^{\infty} f(k-1, \lambda_2, \Gamma_{k-1-\sigma}(N)) \right\} \leqslant \lambda_2$$

于是有 $x^* = \{x_n^*\}$ 使得

$$\lim_{n \to \infty} x_n^{(i)} = x_n^*.$$

由 Lebesgue 控制收敛定理可知 $x^* = Fx^*$. 由(5.5.8)显然有

$$\frac{\lambda_1}{\Gamma_n(N)} \leqslant x_n^* \leqslant \lambda_2, \quad n \leqslant N.$$

令 $z_n = \Gamma_n(N) x_n^*$. 它是(5.5.1)的一个最终正解且

$$z_n = \lambda_1 + p_n z_{n-\tau}$$
$$+ \sum_{k=N}^{n-1} \Gamma_k(N) f(k-1, z_{k-1-\sigma}) + \Gamma_n(N) \sum_{k=n}^{\infty} f(k-1, Z_{k-1-\sigma}),$$
$$\lim_{n \to \infty} (z_n - p_n z_{n-\tau}) = \infty.$$

由引理 5.5.1 知 $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = \infty$. 而

$$r_n\Delta(z_n - p_n z_{n-\tau}) = \sum_{k=n}^{\infty} f(k, z_{k-\sigma}).$$

证毕.

定理 5.5.8 假设(H_3),(H_4),(H_6)和(H_7)成立且有正数 $K_1 > K_2 > 0$ 使得

$$e^{K_2\tau} \leqslant \frac{1}{p_n} < e^{K_1\tau}, \quad n \geqslant 0,$$

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{r_k}\sum_{i=k}^{\infty} f(i, e^{-K_2(i-\sigma)}) \leqslant (p_n e^{K_1\tau} - 1)e^{-K_1 n},$$

则方程 (5.5.1) 有解属于 $\Omega(0,0,0)$.

证明 令

$$M = \{x_n \in l_0^{\infty} \mid e^{-K_1 n} \leqslant x_n \leqslant e^{K_2 n},$$
$$|x_n - x_m| \leqslant L\,|n - m|, n, m \geqslant 0\},$$

其中 $L = \max\{K_1, K_2\}$. 选择 N 使得

$$\sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{r_k}\sum_{s=k}^{\infty} f(s, e^{-K_2(s-\sigma)}) \leqslant (\alpha - p_n)L, \quad n \geqslant N,$$

$$\alpha + e^{-K_2(n-\tau)} \leqslant 1, \quad n \geqslant N,$$

其中 $\alpha \in (p, 1)$. 定义

$$(Fx)_n = p_n x_{n-\tau} - \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{r_k}\sum_{s=k}^{\infty} f(s, x_{s-\sigma}), \quad n \geqslant N$$

$$(Fx)_n = \exp\left\{\frac{\ln(Fx)_N}{N} n\right\}, \quad 0 \leqslant n < N.$$

如果$\{x_n\} \in M$,我们有

$$(Fx)_n \leqslant p_n x_{n-\tau} \leqslant p_n e^{-K_2(n-\tau)} \leqslant e^{-K_2 n},$$

$$(Fx)_n \geqslant p_n e^{-K_1(n-\tau)} - \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{r_k}\sum_{s=k}^{\infty} f(s, e^{-K_2(s-\sigma)})$$

$$= e^{-K_1 n} + (p_n e^{-K_1\tau} - 1)e^{-K_1 n} - \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{r_k}\sum_{s=k}^{\infty} f(s, e^{-K_2(s-\sigma)}))$$

$$\geqslant e^{-K_2 n}.$$

即有 $FM \subseteq M$. 对于 $m \geqslant n \geqslant N$,

$$(Fx)_m - (Fx)_n$$

$$\leqslant \left[(p_m + e^{-K_2(n-\tau)})L + \frac{1}{r_n}\sum_{s=n}^{\infty} f(s, e^{-K_2(s-\sigma)})\right](m-n)$$

$$\leqslant L[e^{-K_2(n-\tau)} + \alpha](m-n) \leqslant L(m-n).$$

对于 $0 \leqslant n \leqslant m \leqslant N$,

$$|(Fx)_m - (Fx)_n| = \left|\exp\left(\frac{\ln(Fx)_N}{N}m\right) - \exp\left(\frac{\ln(Fx)_N}{N}n\right)\right|$$

$$\leqslant L(m-n).$$

下证 F 的连续性. 设 $\varepsilon > 0$, 选择 $N_1 > N$ 使得

$$\sum_{k=N_1}^{\infty} \frac{1}{r_k}\sum_{s=k}^{\infty} f(s, e^{-K_2(s-\sigma)}) < \varepsilon.$$

$$|(Fx^{(i)})_n - (Fx)_n|$$

$$\leqslant p_n \| x^{(i)} - x \| + \sum_{k=N_1}^{\infty} \frac{1}{r_k}\sum_{s=k}^{\infty} |f(s, x^{(i)}_{s-\sigma}) - f(s, x_{s-\sigma})|$$

$$\leqslant p \| x^{(i)} - x \| + 2\sum_{k=N_1}^{\infty} \frac{1}{r_k}\sum_{s=k}^{\infty} f(s, e^{-K_2(s-\sigma)})$$

$$\leqslant p \| x^{(i)} - x \| + 2\varepsilon.$$

因此, 当 $x^{(i)} \to x$ 时有

$$\lim_{i\to\infty}\left\{\sup_{n\geqslant N} |(Fx^{(i)})_n - (Fx)_n|\right\} = 0,$$

$$\sup_{0\leqslant n\leqslant N} |(Fx^{(i)})_n - (Fx)_n| \leqslant |\ln(Fx^{(i)})_N - \ln(Fx)_N|.$$

所以有 $\lim_{i\to\infty} Fx^{(i)} = Fx$.

最后证明 FM 是一致 Cauchy 的. 设 $\{x_n\} \in l_0^\infty$, 那么当 $m > M \geqslant N$ 时

$$|(Fx)_n - (Fx)_m| \leqslant |p_n x_{n-\tau} - p_m x_{m-\tau}| + \left|\sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{r_k}\sum_{s=k}^{\infty} f(s, x_{s-\sigma})\right|$$

$$\leqslant 2e^{-K_1(n-\tau)} + (p_n e^{K_1\tau} - 1)e^{-K_1 n}.$$

于是有 N_1 使得 $m,n \geqslant N_1$ 时有 $|(Fx)_n - (Fx)_m| < \varepsilon$. 于是, F 在 M 上有不动点 x. 它是满足要求的(5.5.1)的解. 证毕.

§ 5.6 非振动解的存在性

本节中将考虑线性方程

$$\Delta^2(x_n - cx_{n-m}) + p_n x_{n-k} = 0, \tag{5.6.1}$$

其中 m 是正整数, k 是非负整数, $c>1$ 是常数, $\{p_n\}$ 是实数列. 值得注意的是本节并不要求 p_n 非负.

定理 5.6.1 假设 $c>1, m, k \geqslant 1$ 且

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \mid p_n \mid < \infty, \tag{5.6.2}$$

则(5.6.1)有有界正解.

证明 选择 N 足够大使得

$$\sum_{i=n}^{\infty} i \mid p_i \mid < \frac{c-1}{4}, \quad n \geqslant N.$$

$$M = \left\{ \{x_n\} \in l_N^{\infty} \,\middle|\, \frac{c}{2} \leqslant x_n \leqslant 2c,\ n \geqslant N \right\}.$$

定义算子, $n \geqslant N$ 时

$$(Tx)_n = \frac{3}{2}(c-1) + \frac{1}{c}x_{n+m} + \frac{1}{c}\sum_{i=n+m}^{\infty}[i-(n+m-1)]p_i x_{i-k},$$

$$n_0 \leqslant n \leqslant N_1 \text{ 时}, (Tx)_n = 2c.$$

显然, $TM \subseteq M$, 如果 $x, y \in M$, 我们有

$$|(Tx)_n - (Ty)_n| \leqslant \frac{1}{c}|x_{n+m} - y_{n+m}| +$$

$$\frac{1}{c}\sum_{i=n+m}^{\infty}[i-(n+m-1)]\,|p_i|\,|x_{i-k} - y_{i-k}|$$

$$\leqslant \frac{1}{c}\left(1+\frac{c-1}{4}\right)\|x-y\|.$$

由 Banach 压缩映射原理可知 T 在 M 上有不动点 x. 令, $y_n=\frac{x_n}{c}$,则有

$$y_{n+m}-cy_n=-\frac{3}{2}(c-1)-\sum_{i=n+m}^{\infty}[i-(n+m-1)]p_iy_{i-k}.$$

因此

$$\Delta^2(y_{n+m}-cy_n)=-p_{n+m}y_{n+m-k}.$$

$\{y_n\}$是(5.6.1)的解,且满足$\frac{1}{2}\leqslant y_n\leqslant 2$, 证毕.

§5.7 不稳定型方程

考虑不稳定型差分方程

$$\Delta^2(x_n-cx_{n-m})=p_nx_{n-k},\quad n\geqslant n_0, \tag{5.7.1}$$

其中 $p_n\geqslant 0$ 且有正的子列, $c\geqslant 0$ 是常数, m 是正整数, k 是非负整数. 对于(5.7.1),我们会有如下结果.

定理 5.7.1 方程(5.7.1)总有最终正解$\{x_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$.

证明 选择$\{H_n\}$使得

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}p_nH_n=\infty,\quad \frac{p_n}{\sum\limits_{i=n_0}^{n}p_iH_i}\to 0.$$

定义

$$z_n=\prod_{l=n_0}^{n}\sum_{k=n_0}^{l}\prod_{j=n_0}^{k}\sum_{i=n_0}^{j}p_iH_i$$

选择 N_1 使得 $n\geqslant N_1$ 时

$$
\begin{cases}
z_n \geqslant 1, \quad c\dfrac{z_{n-m}}{z_n} < \dfrac{1}{2}, \\
c\dfrac{z_{n-m}}{z_n} + \dfrac{1}{z_n}\sum\limits_{i=n_0}^{n-1}(n-1-i)p_i z_{i-k} \leqslant \dfrac{1}{2}.
\end{cases}
\tag{5.7.2}
$$

$$
S = \{\{x_n\} \in l_N^\infty \mid ; 0 \leqslant x_n \leqslant 1, \quad n \geqslant n_0\}.
$$

定义算子

$$
(Tx)_n = c\frac{z_{n-m}}{z_n}x_{n-m} + \frac{1}{z_n}\sum_{i=n_0}^{n-2}(n-1-i)p_i x_{i-k} z_{i-k} + \frac{1}{2z_n}, \quad n \geqslant N_1.
$$

$(Tx)_n = 1, n_0 \leqslant n < N_1.$

由(5.7.2)可知 $TS \subseteq S$. 设 $x, x^* \in S$, 那么

$$
\begin{aligned}
|(Tx)_n - (Tx^*)_n| &\leqslant c\frac{z_{n-m}}{z_n}|x_{n-m} - x_{n-m}^*| \\
&\quad + \frac{1}{z_n}\sum_{i=n_0}^{n-2}(n-1-i)p_i z_{i-k}|x_{i-k} - x_{i-k}^*| \\
&\leqslant \frac{1}{2}\|x - x^*\|, \quad n \geqslant N_1.
\end{aligned}
$$

由压缩映射原理可知 T 在 S 中有不动点 x 使得

$$
x_n = c\frac{z_{n-m}}{z_n}x_{n-m} + \frac{1}{z_n}\sum_{i=n_0}^{n-2}(n-1-i)p_i x_{i-k} z_{i-k} + \frac{1}{2z_n}, \quad n \geqslant N_1
$$

$$
x_n = 1, \quad n_0 \leqslant n < N_1.
$$

令 $y_n = x_n z_n$, 则有

$$
y_n = cy_{n-m} + \sum_{i=n_0}^{n-2}(n-1-i)p_i y_{i-k}, \quad n \geqslant N_1,
$$

$$
y_n = z_n, \quad n_0 \leqslant n < N_1.
$$

因此

$$
\Delta^2(y_n - cy_{n-m}) = p_n y_{n-k}, \quad n \geqslant N_1.
$$

即 $\{y_n\}$ 是(5.7.1)的最终正解. 下证 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$.

事实上,令 $u_n = y_n - cy_{n-m}$, 那么

$$u_n = \sum_{i=n_0}^{n-2}(n-1-i)p_i y_{i-k} + \frac{1}{2} > 0,$$

$$\Delta u_n = \sum_{i=n_0}^{n-1} p_i y_{i-k} > 0,$$

$$\Delta^2 u_n = p_n y_{n-k} \geqslant 0,$$

因此, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$. 于是 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$. 证毕.

§5.8　含最大值差分方程非振动解的渐近性

考虑非线性二阶中立型差分方程

$$\Delta^2(x_n - p_n x_{n-\tau}) + q_n \max_{n-\sigma\leqslant s\leqslant n} x_s = 0, \quad n = 0,1,\cdots, \tag{5.8.1}$$

其中 $\tau>0, \sigma\geqslant 0$, $\{p_n\}$ 是实数列, $\{q_n\}$ 是非负实数列且有正的子列. 显然,当 $\sigma>0$ 时(5.8.1)是非线性的.

5.8.1　一些基本引理

如果 $\{x_n\}$ 是(5.8.1)的一个解,我们将定义

$$z_n = x_n - p_n x_{n-\tau}, \quad n = 0,1,\cdots, \tag{5.8.2}$$

引理 5.8.1　设有正数 p, 使得 $N\geqslant 0$ 时, $0\leqslant p_n\leqslant p$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_n = \infty. \tag{5.8.3}$$

$\{x_n\}$ 是(5.8.1)的最终正解, z_n 由(5.8.2)定义,则最终有

(i) $z_n<0$, $\Delta z_n<0$, $\Delta^2 z_n\leqslant 0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty}\Delta z_n = -\infty$, 或

(ii) $z_n<0$, $\Delta z_n>0$, $\Delta^2 z_n\leqslant 0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty}\Delta z_n = 0$.

证明　由(5.8.1)可知 $\Delta^2 z_n\leqslant 0$ 且不恒为零,因此, $\lim\limits_{n\to\infty}\Delta z_n = -\infty$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}\Delta z_n = L$. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\Delta z_n = -\infty$ 成立,自然有(i)是事实. 如果

$\lim\limits_{n\to\infty}\Delta z_n = L$成立,我们分 $L<0, L=0$ 和 $L>0$ 三种情况来讨论.如果 $L<0$,则有 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = -\infty$.由 z_n 的定义可知

$$z_n = x_n - p_n x_{n-\tau} > -p_n x_{n-\tau} \geqslant -p x_{n-\tau}.$$

于是有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. 对(5.8.1)求和,则有

$$\Delta z_n = \Delta z_N - \sum_{i=N}^{n-1} q_i \max_{i-\sigma\leqslant s\leqslant i} x_s \to -\infty.$$

这是一个矛盾.如果 $L>0$, 我们可类似证得矛盾.因此只有 $L=0$.这时显然有 $\Delta z_n>0$.从而 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$或 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \bar{L}$. 如果$\{z_n\}$发散或收敛于正数,则有

$$x_n \geqslant x_n - p_n x_{n-\tau} \geqslant z_n \geqslant \frac{1}{2}\bar{L} > 0.$$

这时类似前面证明有 $\lim\limits_{n\to\infty}\Delta z_n = -\infty$.如果 $\bar{L}<0$,则

$$\bar{L} \geqslant z_n > -p_n x_{n-\tau} \geqslant -p_n x_{n-\tau}, \quad x_{n-\tau} > -\frac{\bar{L}}{p}.$$

也有 $\lim\limits_{n\to\infty}\Delta z_n = -\infty$.因此只有 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$ 成立.这时 $z_n<0$ 显然.证毕.

对于(5.8.1)的最终负解$\{x_n\}$我们也会得到类似引理 5.8.1 的结果.

在引理 5.8.1 中,如果附加条件

$$p_{N+j\tau} \leqslant 1, \quad j = 0,1,2,\cdots, \tag{5.8.4}$$

则引理 5.8.1 只有(ii)成立.事实上, 如果(i)成立, 则有正数 α 和正整数J 使得 $z_n < -\alpha, n\geqslant J$.因此,

$$x_n = z_n + p_n x_{n-\tau} < -\alpha + p_n x_{n-\tau}, \quad n \geqslant J.$$

选择 M 使得$N + M\tau \geqslant J$ 归纳可知

$$\begin{aligned} x_{N+M\tau+k\tau} &= z_{N+M\tau+k\tau} + p_{N+M\tau+k\tau} x_{N+M\tau+(k-1)\tau} \\ &< -\alpha + x_{N+M\tau+(k-1)\tau} \\ &< \cdots \\ &< -k\alpha + x_{N+M\tau}. \end{aligned}$$

这矛盾于$\{x_n\}$的正性.

引理 5.8.2 引理5.8.1的条件和(5.8.4)成立，$\{x_n\}$是(5.8.1)的最终正解，$\{z_n\}$由(5.8.2)定义，则最终有$z_n<0,\Delta z_n>0$，且$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=\lim\limits_{n\to\infty}\Delta z_n=0$.

5.8.2 渐近性质

定理 5.8.1 引理5.8.1的条件成立，$\{x_n\}$是(5.8.1)的最终正解，则或者$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$或者$\lim\limits_{n\to\infty}\inf x_n=0$.

证明 如果引理5.8.1的(i)是事实，则由

$$z_n>-p_nx_{n-\tau}\geqslant -px_{n-\tau}$$

可知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$. 如果(ii)成立，对(5.8.1)求和有

$$\sum_{n=N}^{\infty}q_n\max_{n-\sigma\leqslant s\leqslant n}x_s<\infty.$$

由(5.8.3)可知$\lim\limits_{n\to\infty}\inf x_n=0$. 证毕.

当$\{p_n\}$是无界时，定理5.8.1的结论不成立. 例如方程

$$\Delta^2(x_n-n(n-1)x_{n-\tau})+2\max_{n-\sigma\leqslant s\leqslant n}x_s=0$$

有解$\{1\}$.

如下结果是显然的.

定理 5.8.2 引理5.8.2的条件成立，$\{x_n\}$是(5.8.1)的最终正解. 则$\lim\limits_{n\to\infty}\inf x_n=0$.

定理 5.8.3 如果有正数p和q使得

$$0\leqslant p_n\leqslant p,\quad q_n\geqslant q,\quad n\geqslant 0,$$

则(5.8.1)的最终正解$\{x_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$或$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

证明 如果引理5.8.1中的(i)成立，自然有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$. 如果(ii)成立且$\{x_n\}$不收敛于零，则有子列$\{n(i)\}_{i=0}^{\infty}$使得

$$n(i+1)-n(i)>0,\quad x_{n(i)}>\delta>0,\quad i=0,1,2,\cdots,$$

如同定理 5.1.8 的证明，我们有

$$\sum_{n=n(0)}^{\infty} q_n \max_{n-\sigma\leqslant s\leqslant n} x_s < \infty.$$

另外

$$\sum_{n=n(0)}^{\infty} q_n \max_{n-\sigma\leqslant s\leqslant n} x_s \geqslant \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=\sigma(i)}^{n(i)+\sigma} q_j \max_{j-\sigma\leqslant s\leqslant j} x_s$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{\infty} q\delta(\sigma+1) = \infty.$$

这是一个矛盾，证毕.

定理 5.8.1 和定理 5.8.2 对 (5.8.1) 的最终负解可有类似的结果，但是定理 5.8.3 对负解不成立. 例如方程

$$\Delta(x_n - 4x_{n-2}) + \frac{15}{4}\max_{n-2\leqslant s\leqslant n} x_s = 0$$

有最终负解 $\{x_n\} = \{-2^n(1+(-1)^n) - 2^{-n}\}$，它满足

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = -\infty, \quad \limsup_{n\to\infty} x_n = 0.$$

定理 5.8.4 定理 5.8.3 的条件和(5.8.4)成立，则 (5.8.1) 的最终正解 $\{x_n\}$ 满足 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

定理 5.8.4 是显然的，但是它对最终负解不成立. 例如方程

$$\Delta^2(x_n - x_{n-2}) + \frac{3}{4}\max_{n-2\leqslant s\leqslant n} x_s = 0$$

有解 $\{-1-(-1)^n-2^{-n}\}$.

最后，定理 5.8.1 至定理 5.8.4 均可建立起方程

$$\Delta^2(x_n - p_n x_{n-\tau}) + q_n x_{n-\tau} = 0 \tag{5.8.5}$$

的类似结果. 这些结果对 (5.8.5) 的所有非振动解都是事实，证明完全类似.

§5.9 注 记

§5.1 由 Xie, Zhang 和 Cheng 在[101]获得. §5.2 选自[102]和

[103], Zhang 和 Cheng 利用 Riccati 技巧获得了§5.3 的内容.渐近性部分则参阅了 Lalli 和 Zhang 的[107], §5.5 由 Li 和 Cheng 在[108]中建立.定理 5.6.1 和定理 5.7.1 可在[107]中找到, §5.8 的内容是由 Zhang 和 Cheng 在[110]中建立.[104],[105]和[109]主要考虑了具有非线性中立项的差分方程.

第六章　高阶差分方程的振动性

§6.1　四阶差分方程的分离定理

本节将考察四阶差分方程

$$\Delta^4 y_n + p_{n+2}y_{n+2} = 0, n = 0,1,2,\dots, \tag{6.1.1}$$

其中$\{p_n\}$是正的实数列.

方程(6.1.1)可以写成

$$y_{n+4} - 4y_{n+3} + (6 + p_{n+2})y_{n+2} - 4y_{n+1} + y_n = 0. \tag{6.1.2}$$

因此,(6.1.1)解的存在性与唯一性是显然的.

6.1.1　结点

设f是定义在$\{a, a+1, \cdots, b\}$上的实值函数.显然,点集$\{(k, f(k)) | a \leqslant k \leqslant b\}$在坐标平面是离散的,用直线连接$(a, f(a))$与$(a+1, f(a+1)), \cdots, (b-1, f(b-1))$与$(b, f(b))$,则构成一条连续的曲线$f^0(t)$.显然,对整数$k \in [a,b]$有$f^0(k) = f(k)$. $f^0(t)$的零点称为$f(k)$的结点.

如果$r \in [k, k+1]$,记$r^+ = k+1$;如果$s \in [k, k+1]$,记$s^- = k$. t是$f(k)$的结点,如果有$f(t^-) \neq 0, f(t^+) \neq 0$,这时称$t$是$f(k)$的简单结点.

如下的事实是显然的.

引理 6.1.1　点(x_1, y_1),(x_2, y_2)和$(0,0)$共线的充要条件是$x_1y_2 - x_2y_1 = 0$. $x_1y_2 - x_2y_1 > 0$当且仅当向量$(0,0,1)$和$(x_1, y_1, 0)$,$(x_2, y_2, 0)$满足右手法则.

定理 6.1.1 f 和 g 是定义在相邻整数集的函数,如果对某一 c 有

$$f(c+1)>0, f(c)\leqslant 0, g(c+1)>0$$

且

$$g(c)f(c+1)-g(c+1)f(c)\leqslant 0.$$

则 $g(k)$ 在 $[r,c+1)$ 中有一简单结点,其中 r 是 $f(k)$ 在 $[c,c+1)$ 中的结点.

证明 点 $(f(c+1),g(c+1))$ 在第一象限.由引理 6.1.1 可知 $(f(c),g(c))\in\{(x,y)\mid 0\geqslant x>y\}$.于是,$g^0(t)$ 在 $[r,c+1]$ 中有唯一的零点.证毕.

如下结果是 Rolle 定理的离散形式.证明省略.

引理 6.1.2 如果对某一整数 N,$f(x)$ 有两个结点 s 和 t 满足 $t>N>s$,则 $\Delta f(k)$ 在 $[s^+-1,t^+-1]$ 中至少有一个结点.

6.1.2 二阶差分系统

考虑差分系统

$$\begin{cases}\Delta^2 x_n=-p_{n+1}y_{n+1},\\ \Delta^2 y_n=x_{n+1}, \qquad n=1,2,\cdots,\end{cases}\tag{6.1.3}$$

(6.1.3)的一个解是向量序列 $z_n=(x_n,y_n)$.显然,y_n 满足(6.1.1)当且仅当 $(\Delta^2 y_{n-1},y_n)=(x_n,y_n)$ 满足(6.1.3)式.

设 $z_n=(x_n,y_n)$ 是(6.1.3)的非退化解.记,

$$w(n,z)=w_n=x_n y_{n+1}=x_n\Delta y_n-y_n\Delta x_n.$$

于是,由引理 6.1.1 直接可知如下结果.

引理 6.1.3 $w_N=0$ 当且仅当 $(0,0)$,(x_N,y_N) 和 (x_{N+1},y_{N+1}) 共线.$w_N>0$ 当且仅当 $(0,0,1)$,$(x_N,y_N,0)$ 和 $(x_{N+1},y_{N+1},0)$ 满足右手法则.

我们应当注意到

$$\begin{aligned}\Delta w_n &= x_{n+1}\Delta^2 y_n - y_{n+1}\Delta^2 x_n\\ &= x_{n+1}^2 + p_{n-1}y_{n+1}^2, n = 1,2,3,\ldots.\end{aligned}$$

由 p_n 的正性可知，w_n 单增且 $\Delta w_n=0$ 当且仅当 $z_{n+1}=0$. 同时由解的非退化性可知 Δw_n 不会在相邻两点为零. 于是有如下结果.

定理 6.1.2 w_n 不会有相邻三点为零. 同时，w_n 除可能有相邻两点相等外是严格增加的.

定理 6.1.3 如果 $w_N=w_{N+1}=0$,那么对任意 $t\in[N,N+1)$有 $z^0(t)\neq 0$.

否则，若有 $z_N=0$，而由已知有 $z_{N+1}=0$. 这与 z_n 非退化矛盾. 当 $w_n\neq 0$ 时,向量(x_n,y_n),(x_n,x_{n+1})和(y_n,y_{n+1})都不为零. 这时由定理6.1.2 的后半段可知如下结果:

定理 6.1.4 设 $z(x_n,y_n)$是(6.1.3)的非退化解，则向量(x_n,y_n),(x_n,x_{n+1})和(y_n,y_{n+1})不会在两个非相邻点为零.

如果这些向量之一在 $n=N$ 时为零，则 x_n 和 y_n 的结点在$[1,N-1)$和$(N+2,\infty)$是简单结点.

设 J 是$[1,\infty)$的子区间,z_n 是(6.1.3)的非退化解. $z^0(t)$可以利用极坐标$(R(t),\theta(t))$代换. 由 $z^0(t)$的连续性可知 $\theta(t)$也是连续的. 这时，如果有 $w_N>0$，由引理6.1.3 可知 $\theta(t)$在$[N,N+1)$单调增加. 归纳可知，如果 $k=M,\cdots,N$ 时$w_k>0$,则 $\theta(t)$在$[M,N+1]$上严格增加.

设 $z_n=(x_n,y_n)$,$F_n=(u_n,v_n)$是(6.1.3)的两个解. 它们的线性组合是

$$H_n = \alpha z_n + \beta F_n.$$

通过直接计算可知

$$\begin{aligned}&\Delta[x_n\Delta v_n + y_n\Delta u_n - u_n\Delta y_n - v_n\Delta x_n]\\ &= \Delta[x_n v_{n+1} + y_n u_{n+1} - u_n y_{n+1} - v_n x_{n+1}] = 0,\end{aligned}\tag{6.1.4}$$

$$\begin{aligned}&w(n,H) = \alpha^2 w(n,z) + \beta^2 w(n,F) +\\ &\alpha\beta(x_n v_{n+1} + u_n y_{n+1} - y_n u_{n+1} - v_n x_{n+1}).\end{aligned}\tag{6.1.5}$$

定理6.1.5 设 $z_n=(x_n,y_n)$, $F_n=(u_n,v_n)$是(6.1.3)的非退化解.如果有 $\mu\in[1,\infty)$使得点(0,0), $z^0(\mu)$和 $F^0(\mu)$共线，则有非退化数对(α,β)使得 $H_n=\alpha z_n+\beta F_n$ 是(6.1.3)的解且满足 $H^0(\mu)=0$.如果附加条件 $z^0(\mu)\neq 0$, $F^0(\mu)\neq 0$, $\theta(t)$和 $\sigma(t)$分别是 z_n 和 F_n 的幅角函数,满足 $\theta(\mu)-\sigma(\mu)=n\pi$,则有$(-1)^n\alpha\beta<0$.

证明 如果 $z^0(\mu)=0$ 或 $F^0(\mu)=0$,我们选择 $\alpha=\beta=1$.否则,代数系统

$$\begin{cases}\alpha x^0(\mu)+\beta u^0(\mu)=0,\\ \alpha y^0(\mu)+\beta v^0(\mu)=0\end{cases}$$

有非退化解(α,β).显然,H_n 是 (6.1.3)的解且满足 $H^0(\mu)=0$.

注意到 $\alpha\beta<0$ 当且仅当 $x^0(\mu)u^0(\mu)>0$ 或 $y^0(\mu)v^0(\mu)>0$.从而当 $\theta(\mu)-\sigma(\mu)=n\pi$ 时有$(-1)^n\alpha\beta<0$.证毕.

定理 6.1.6 设(x_n,y_n)是(6.1.3)的解, M 和N 是正整数,令 $n=N+M-j$, $X_j=x_{N+M-j}$, $Y_j=y_{N+M-j}$则(X_j,Y_j)对 $j=1,2,\cdots,N+M-1$满足方程

$$\begin{cases}\Delta^2 X_j=-p_{N+M-j}Y_{j+1},\\ \Delta^2 Y_j=X_{j+1}.\end{cases}$$

6.1.3 单调定理

设 $z_n=(x_n,y_n)$是(6.1.3)的非退化解,$R(t)$和 $\theta(t)$分别是它的模与辐角. $\sigma\geqslant 1$, θ_0 是实数使得

$$R(\sigma)=0,R(\sigma^+)=1,\theta(\sigma)=\theta_0.$$

这时称(6.1.3)的解 z_n 为(σ,θ_0)解.易知,这样的解存在并由 σ 和 θ_0 唯一确定.由引理6.1.3 可知 $w(\sigma^+-1,z)=0$.同时,由定理 6.1.3 有 $w(\sigma^+,z)>0$.于是,$k\geqslant\sigma^+$时,$w(k,z)>0$.

定理 6.1.7 设

$$z_1(n)=(x_1(n),y_1(n)),\quad z_2(n)=(x_2(n),y_2(n))$$

分别是 (6.1.3) 的(σ,θ_1)和(σ,θ_2)解，$\theta_1(t)$和 $\theta_2(t)$分别是其辐角函数.如果对某一整数 m 使得

$$m\pi < \theta_2 - \theta_1 < (m+1)\pi.$$

则 $t\geqslant\sigma$ 时

$$m\pi < \theta_2(t) - \theta_1(t) < (m+1)\pi \qquad (6.1.6)$$

成立.

证明 $t\in[\sigma,\sigma^+]$时，$\theta_2(t)=\theta_2,\theta_1(t)=\theta_1$，(6.1.6)成立.设有 $c\in[\sigma^+,\sigma^++1]$使得 $\theta_2(c)=\theta_1(c)+m\pi$ 或者，那么点 $z_1^0(c)$和 $z_2^0(c)$及原点共线.由定理 6.1.5 可知有非退化数对(α,β)使得 $z(n)=\alpha z_1(n)+\beta z_2(n)$是 (6.1.3) 的解且满足 $z^0(\sigma)=0$.另一方面，$z_1^0(\sigma)=z_2^0(\sigma)=0$，从而 $z^0(\sigma)=0$.于是，$w(n,z)$在 $n=\sigma^+-1$ 和 $n=c^+-1$ 处为零．如果 $c^+-1>\sigma^+$，矛盾于定理 6.1.2；如果 $\sigma^+=c^+-1$，矛盾于定理6.1.3.于是 $t\in(\sigma^+,\sigma^++1]$时，(6.1.6)成立.最后，如果有 $d\in(\sigma^++1,\infty]$使得 $\theta_2(d)=\theta_1(d)+m\pi$ 或 $\theta_2(d)=\theta_1(d)+(m+1)\pi$，类似可证 (6.1.3) 有解 $H(n)$使得 $w(\sigma^+,H)=0$，$w(\sigma^+-1,H)=0$.这矛盾于定理 6.1.3.证毕.

定理 6.1.8 $z_1(n)$是(6.1.3)的(σ,θ_1)解，$\theta_1(t)$是其辐角函数，$z_2(n)$是(6.1.3)的非退化解，$\theta_2(t)$是它的辐角函数，如果 $w(\sigma^+-1,z_2)\geqslant0$，$t\in[\sigma,\sigma^+]$时

$$\theta_1 + m\pi < \theta_2(t) < \theta_1 + (m+1)\pi,$$

则 $t>\sigma^+$时有

$$\theta_1 + m\pi < \theta_2(t) < \theta_1(t) + (m+2)\pi. \qquad (6.1.7)$$

证明 设有 $c\in(\sigma^+,\infty)$使得 (6.1.7) 不成立.由定理6.1.5可知有数对(α,β)满足 $\alpha\beta<0$ 且 $z(n)=\alpha z_1(n)+\beta z_2(n)$满足 $z^0(c)=0$.于是，$w(c^+-1,z)=0$.由(6.1.5)可知，

$$w(\sigma^+-1,z)\geqslant\alpha\beta[x_1(\sigma^+-1)y_2(\sigma^+)-y_2(\sigma^+-1)x_1(\sigma^+)].$$

而

$$x_1(\sigma^+-1)\leqslant 0, x_1(\sigma^+)>0, y_2(\sigma^+)>0, y_2(\sigma^+-1)>0.$$

这与定理6.1.1矛盾.于是,

$$w(\sigma^+-1,z)>0, w(c^+-1,z)=0, z^0(c)=0.$$

这矛盾于定理6.1.2或定理6.1.3.证毕.

定理6.1.9 m 是一正整数,$z_1(k)$是(6.1.3)的$(m,0)$解,$z_2(k)$是(6.1.3)的解,满足$w(m,z_2)<0$且对某一整数 n 有

$$n\pi<\theta_2(m)<(n+1)\pi,$$

则对于$1\leqslant t\leqslant m$有

$$\theta_1(t)+n\pi<\theta_2(t)<\theta_1(t)+(n+2)\pi.$$

定理6.1.9的证明类似定理6.1.7和6.1.8,证明省略.

定理6.1.10 设 $z_1(k)$是(6.1.3)的(σ,θ_1)解,$\theta_1(t)$是辐角函数,$z_2(k)$是(6.1.3)的非退化解,辐角函数是$\theta_1(t)$. $w(\sigma^+-1,z_2)>0$,且$\theta_2(\sigma)=\theta_1+n\pi$,则$t>\sigma$时有

$$\theta_1(t)+n\pi<\theta_2(t)<\theta_1(t)+(n+1)\pi. \tag{6.1.8}$$

证明 不妨设$n=0,\theta_1=0$, 由引理6.1.3知$\sigma<t<\sigma^+$时命题成立.如果有$c\in(\sigma^+,\infty)$使得(6.1.8)不成立.则有

$$z(k)=\alpha z_1(k)+\beta z_2(k) \text{ 满足 } z^0(c)=0, w(c^+-1,z)=0.$$

于是有

$$w(\sigma^+-1,z)=$$
$$\beta^2 w(\sigma^+-1,z_2)+\alpha\beta[x_1(\sigma^+-1)y_2(\sigma^+)-y_2(\sigma^+-1)x_1(\sigma^+)].$$

又因为$(0,0),(x_1(\sigma^+-1),y_2(\sigma^+-1)),(x_1(\sigma^+),y_2(\sigma^+))$共线,由定理6.1.1知,$x_1(\sigma^+-1)y_2(\sigma^+)-y_2(\sigma^+-1)x_1(\sigma^+)=0$.因此$w(\sigma^+-1,z)>0$.这是一个矛盾.证毕.

定理6.1.11 $m<n$ 是两个分离的正整数,$z_1(k)$和$z_2(k)$分别是(6.1.3)的$(m,0)$和$(n,0)$解,则$y_1(n)=-y_2(m)$.

证明 由(6.1.4)知:

$$x_1(k)y_2(l+1)+y_1(k)x_2(k+1)-x_2(k)y_1(k+1)-y_2(k)x_1(k+1)$$

恒为常数，将 $k=m$ 和 $k=n$ 代入上式则有结论成立. 证毕.

6.1.4 分离定理

对于 (6.1.3) 的一个非退化解 $z(k)$，其对应的辐角函数或者在 $[1,\infty)$ 上严格减少，或者在 $[1,T^+-1)$ 严格减少，在 $[T^+-1,T)$ 和 $[T,T^+]$ 分别是常数，在 $[T^+,\infty)$ 严格增加，因此，连续运动必然交替穿越 x，y 轴，$T\in[1,\infty)$ 可能例外.

定理 6.1.12 $(x(k),y(k))$ 是 (6.1.3) 的非退化解，则 $x(k)$ 和 $y(k)$ 的结点是简单的且在 $[1,\infty)$ 互相分离，$T\in[1,\infty)$ 的某邻域可能例外，邻域的长度最多是 2.

定理 6.1.13 设 $z_1(k)$ 和 $z_2(k)$ 是 (6.1.3) 二线性无关解，假设 $y_1(k)$ 和 $y_2(k)$ 在二相邻整数 N 和 $N+1$ 消失，则 $y_1(k)$ 和 $y_2(k)$ 的结点在 $[1,N-1]$ 和 $[n+2,\infty)$ 互相分离.

证明 由定理 6.1.4 知 $y_1(k)$ 和 $y_2(k)$ 在 $[N+2,\infty)$ 上的结点是简单的. 如果矛盾，可设 $y_1(k)$ 在 $[N+2,\infty)$ 上有二相邻结点 v 和 μ 使得 $v\leqslant t\leqslant\mu$ 时 $y_2^0(t)\neq 0$. 因 μ 是简单结点，则有 $\sigma\in(\mu,v)$ 使得 $x_1^0(\sigma),y_1^0(\sigma),x_2^0(\sigma),y_2^0(\sigma)$ 共线. 由定理 6.1.5 知有 $z(k)=\alpha z_2(k)+\beta z_2(k)$ 满足 $z^0(\sigma)=0$. 因此，$w(\sigma^+-1,z)=0$. 将

$$y_1(N)=y_2(N)=Y_1(N+1)=y_2(N+1)=0$$

代入 (6.1.5)，则有 $w(N,z)=0$，因此 $k\geqslant N+2$ 时，$w(k,z)>0$. 矛盾于 $w(\sigma^+-1,z)=0$. $[1,N-1]$ 上的情况类似可证. 证毕.

§6.2 四阶差分方程的正解

本节继续考虑方程 (6.1.1)，为方便起见，我们再次将方程写出

$$\Delta^4 y_n+p_{n+2}y_{n+2}=0,n=0,1,2\ldots, \tag{6.2.1}$$

其中 p_n 满足与 §6.1 相同的条件.

由第一节知识可知，方程(6.2.1)或者所有解振动，或者所有解非振动. 因此，有必要讨论 (6.2.1) 非振动解的性质与存在性. 首先给出的几个定理是对一般解而言的.

定理 6.2.1　设 $\{y_n\}$ 是 (6.2.1) 的解,定义

$$F(y_n) = y_{n+1}\Delta^3 y_n - \Delta y_n \Delta^2 y_n, \tag{6.2.2}$$

则 $F(y_n)$ 非增.

证明　对 (6.2.2) 求差分，有

$$\begin{aligned}\Delta F(y_n) &= y_{n+2}\Delta^4 y_n - (\Delta^2 y_n)^2 \\ &= -p_{n+2}y_{n+2}^2 - (\Delta^2 y_n)^2 \leqslant 0.\end{aligned}$$

证毕.

由定理 6.2.1 可知 $F(y_n)$ 最终是单符号的. 显然，对于退化解 $y_n \equiv 0, F(y_n) \equiv 0$. 如果 (6.2.1) 的一个解满足 $F(y_n) \geqslant 0$,我们称其为 Ⅰ－型解;如果 $F(y_n) < 0$, 称其为 Ⅱ－型解.

Ⅱ－型解显然存在，例如满足 $y_k = 0, y_{k+1} = 0$ 的(6.2.1)的非退化解 $\{y_n\}$. 这时必有 $F(y_k) = 0$. 因此，由定理 6.2.1 可知 $n > k$ 时 $F(y_n) < 0$. Ⅰ－型解也是存在的，我们看如下结果.

定理 6.2.2　方程(6.2.1)存在非退化 Ⅰ－型解.

证明　设 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ 和 $\{w_n\}$ 是(6.2.1)线性无关解，则对于任一组数 $a_i^m, i = 1,2,3,4$,线性组合

$$u_n^m = a_1^m x_n + a_2^m y_n + a_3^m z_n + a_4^m w_n$$

是(6.2.1)的一个解. 选择 a_i^m 使得 $u_m^m = u_{m+1}^m = 0$, $\sum_{i=1}^{4}(a_i^m)^2 = 1$. 令, $A_m = (a_1^m, a_2^m, a_3^m, a_4^m)$, 则 $\| A_m \| = 1$. 因单位球在 $\mathbf{R}^4$ 完备，则 A_m 有收敛子列, $A_{m_i} \to A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ 且

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 1.$$

令

$$U_n = \lim_{i\to\infty} u_n^{m_i} = a_1x_n + a_2y_n + a_3z_n + a_4w_n.$$

显然,$\{u_n\}$是非退化解.下证 u_n 是 I-型的.

否则,若有 r 使得$F(u_r)<0$ 成立,因 $u_r^{m_i}\to u_r$,于是有 $F(u_r^{m_i})\to F(u_r)<0$.因此有 N 使得 $i>N,m_i>r$ 时,$F(u_r^{m_i})<0$.因 $F(u_i^{m_i})=0,F(u_r^{m_i})<0$ 则 $m_i>r$ 时,$0=F(u_r^{m_i})<0$,得出矛盾.证毕.

定理 6.2.3 如果$\{y_n\}$是 (6.2.1) 的 I-型解,则

$$\sum^{\infty}(\Delta^2 y_n)^2<\infty,\sum^{\infty} p_n y_{n+1}^2<\infty,\sum^{\infty}(\Delta^3 y_n)^2<\infty,$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\Delta^3 y_n = \lim_{n\to\infty}\Delta^2 y_n = 0.$$

证明 对(6.2.2)求差分,有

$$\Delta F_n = \Delta F(y_n) = -p_{n+2}y_{n+2}^2-(\Delta^2 y_n)^2.$$

从 $j=1$ 到 $m-1$ 求和,有

$$0<F_m = F_1-\sum_{j=1}^{m-1}p_{j+2}y_{j+2}^2-\sum_{j=1}^{m-1}(\Delta^2 y_j)^2.$$

于是就有

$$\sum^{\infty}(\Delta^2 y_n)^2<\infty,\sum^{\infty}p_n y_n^2<\infty.$$

注意到 $\Delta^3 y_n=\Delta^2 y_{n+1}-\Delta^2 y_n$,显知$\sum^{\infty}(\Delta^2 y_n)^2<\infty$,显然成立.证毕.

定理 6.2.4 设$\{y_n\}$是(6.2.1)的最终正解,则最终有

$$y_n>0,\Delta y_n>0,\Delta^2 y_n>0,\Delta^3 y_n>0,\Delta^4 y_n<0 \quad (6.2.3)$$

或

$$y_n>0,\Delta y_n>0,\Delta^2 y_n<0,\Delta^3 y_n>0,\Delta^4 y_n<0. \quad (6.2.4)$$

证明 由 (6.2.1) 知 $\Delta^4 y_n<0$. $\Delta^3 y_n>0$ 显然成立,否则有 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=-\infty$.这是一个矛盾,这时或者有 $\Delta^2 y_n<0$,或者有 $\Delta^2 y_n>0$.

当 $\Delta^2 y_n<0$ 时,我们自然有 $\Delta y_n>0$.则(6.2.4)成立.如果 $\Delta^2 y_n>0$,注意到 $\Delta^3 y_n>0$ 这时自然有 $\lim\limits_{n\to\infty}\Delta y_n=\infty$.证毕.

定理 6.2.5 $\{y_n\}$是 (6.2.1) 的 I－型最终正解的充分必要条件是 (6.2.4) 式成立.

证明 如果$\{y_n\}$是 (6.2.1) 的 I－型最终正解，由定理 6.2.3 知(6.2.4)成立.相反，(6.2.4) 成立，自然有 $F(y_n)\geqslant 0$. 证毕.

定理 6.2.6 $\{y_n\}$是 (6.2.1) 的 I－型最终正解当且仅当

$$\sum^{\infty}(\Delta^2 y_n)^2 < \infty. \tag{6.2.5}$$

证明 如果$\{y_n\}$是 (6.2.1) 的 I－型最终正解，由定理 6.2.3 知(6.2.5)成立.相反，(6.2.5) 成立，则有 (6.2.4) 成立.由定理 6.2.5 知结论成立.证毕.

定理 6.2.7 设$\{y_n\}$是 (6.2.1) 的最终正解，则

$$\lim_{n\to\infty}\Delta^3 y_n = \lim_{n\to\infty}\frac{6y_n}{n^{(3)}} \text{有限}.$$

证明 设有 N 使得$n\geqslant N$ 时，$y_n>0$. 对 (6.2.1) 求和四次有

$$\begin{aligned} & y_{n+4} + \sum_{j=N}^{n}(n-j+3)^{(3)}\frac{p_{j+2}y_{j+2}}{6} \\ & = y_{N+3} + \Delta y_{N+2}(n-N+1) + \Delta^2 y_{n+1}\frac{(n-N+2)^{(2)}}{2} \\ & \quad + \Delta^3 y_N\frac{(n-N+3)^{(3)}}{6}. \end{aligned} \tag{6.2.6}$$

记上式等号右边为 R_n，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6R_n}{(n-N+3)^{(3)}} = \Delta^3 y_N. \tag{6.2.7}$$

于是

$$\begin{aligned} 6R_n & \leqslant 6y_{n+4} + (n-N+3)^{(3)}\sum_{j=N}^{n}p_{j+2}y_{j+2} \\ & = 6y_{n+4} + (n-N+3)^{(3)}(\Delta^3 y_N - \Delta^3 y_{n+1}). \end{aligned}$$

由(6.2.7)可知

$$\lim_{n\to\infty}\Delta^3 y_{n+1}\leqslant \liminf_{n\to\infty}\frac{6y_{n+4}}{(n-N+3)^{(3)}}.$$

选择 m 使$N<m<n$，由(6.2.6)知

$$6R_n\geqslant 6y_{n+4}+\sum_{j=N}^{m}(n-j+3)^{(3)}p_{j+2}y_{j+2}$$

$$\geqslant 6y_{n+4}+(n-m+3)^{(3)}(\Delta^3 y_N-\Delta^3 y_{m+1}).$$

两边除以$(n-N+3)^{(3)}$，则有

$$\Delta^3 y_{m+1}\geqslant \limsup_{n\to\infty}\frac{6y_{n+4}}{(n-N+3)^{(3)}}.$$

注意到 $\Delta^4 y_4<0$ 因此

$$\lim_{n\to\infty}\Delta^3 y_{n+1}\geqslant \limsup_{n\to\infty}\frac{6y_{n+4}}{(n-N+3)^{(3)}}.$$

证毕.

§6.3 非线性四阶差分方程

本节中将考虑非线性四阶差分方程

$$\Delta^2(r_{n+1}\Delta^2 y_n)+f(n+2,y_{\tau(n)})=0,n=1,2,3,\cdots,\quad(6.3.1)$$

其中$\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$是正数列，τ 是定义在 $\{0,1,2,\cdots\}$ 上的整数值函数且满足$\lim_{n\to\infty}\tau(n)=\infty$，$f$ 是定义在$\{2,3,4...\}\times\mathbf{R}$ 上的实值函数且关于第二变量连续非减，对 $k\geqslant 2$，$y\neq 0$ 时，$yf(k,y)>0$，另外，关于 r_n 要求满足$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i}{r_i}=\infty$.

如果对于固定的 $k\geqslant 2$，当 $y>0$ 时，$\frac{f(k,y)}{y}$关于 y 非减，而当 $y<0$时非增，则称（6.1.3）是超线性的；而对于 $\sigma>1$，$f(k,y)/|y|^{\sigma}\mathrm{sgn}\,y$当$y>0$时非减，$y<0$时非增，称（6.3.1）是强超线性的；如果 $f(k,y)/y$ 当$y>0$非增 $y<0$ 非减，则称（6.3.1）是次

线性的;而对于$0<\mu<1$,$f(k,y)/|y|^{\mu}\operatorname{sgn} y$当$y>0$非增,当$y<0$非减,称(6.3.1)强次线性的.

定义在$n\geqslant\min\{0,\inf_{i\geqslant 0}\tau(i)\}$上的实数列$\{y_n\}$当$n\geqslant 0$满足(6.3.1),称它为(6.3.1)的一个解.如果$\tau(n)\leqslant n+3$,(6.3.1)解的存在唯一性是显然的.否则,我们假设(6.3.1)满足解的存在唯一性定理.

本节中,如下的一些式子也将被采用.

(H_1) $\sum_{i=1}^{\infty} i/r_i=\infty$,

(H_2) $y>0,k\geqslant 2,f(k,y)>0$,

(H_3) $|y|<\infty$时$f(\cdot,y)$连续;$y\neq 0,k\geqslant 2,yf(k,y)>0$,

(H_4) $k\geqslant 2,f(k,y)$关于y非减.

6.3.1 一些基本引理

首先给出一个离散的L'Hospital法则.

引理6.3.1 设$\{u_k\}$和$\{v_k\}$是实数列且当充分大有$v_k,\Delta v_k>0$.如果

$$\lim_{k\to\infty}v_k=\infty,\lim_{k\to\infty}\frac{\Delta u_k}{\Delta v_k}=c,$$

则

$$\lim_{k\to\infty}\frac{u_k}{v_k}=c.$$

其中c可以是无穷大.

引理6.3.2 如果$\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$是严格凹的(即满足:$k\geqslant 1,\Delta^2 u_k>0$),则$\{u_k\}$和$\{\Delta u_k\}$是非振动的;如果$\{u_k\}$是最终负的严格凹数列,则$\{\Delta u_k\}$是最终负的.

引理6.3.2的证明比较简单,这里省略.

引理6.3.3 设(6.3.1)是强次线性的.如果$\{u_n\}$,$\{v_n\}$,$\{w_n\}$和

$\{\mu_n\}$当 $n>N$ 时是正数列，对某一正数 c，$0<\mu_n\leqslant 1$，$u_n\leqslant cw_n$，且

$$u_n \geqslant \mu_n w_n \sum_{i=n-1}^{\infty} v_i f(i+2,u_i),$$

则

$$\sum_{i=N}^{\infty}\mu_i v_i f(i+2,cw_i)<\infty.$$

证明 设

$$B_n=\sum_{i=1}^{\infty} v_i f(i+2,u_i),\ n\geqslant N.$$

因(6.3.1)是强次线性的，则有 η，$0<\eta<1$，使得 $f(\cdot,y)/|y|^{\eta}\operatorname{sgn} y$ 在$(0,\infty)$非增，由中值定理有

$$-\Delta B_n^{1-\eta}=-(1-\eta)\xi^{-1}\Delta B_n,\ B_{n+1}<\xi<B_n.$$

因此，

$$\begin{aligned}
-\Delta B^{-1} &\geqslant (1-\eta)B_n^{-\eta}v_{n-1}f(n+1,u_{n-1})\\
&\geqslant (1-\eta)B_n^{-\eta}v_{n-1}u_{n-1}^{\eta}u_{n-1}^{-\eta}f(n+1,u_{n-1})\\
&\geqslant (1-\eta)B_n^{-\eta}v_{n-1}(\mu_{n-1}w_{n-1}B_{n-1})^{\eta}(cw_{n-1})^{-\eta}f(n+1,cw_{n-1})\\
&\geqslant (1-\eta)c^{-\eta}v_{n-1}\mu_{n-1}^{\eta}f(n+1,cw_{n-1})\\
&\geqslant (1-\eta)c^{-\eta}v_{n-1}\mu_{n-1}f(n+1,cw_{n-1}).
\end{aligned}$$

对上不等式求和，则有

$$0>B_N^{1-\eta}>B_{n+1}^{1-\eta}\geqslant(1-\eta)c^{-\eta}\sum_{i=N}^{n}v_{i-1}\mu_{i-1}f(i+1,cw_{i-1}).$$

证毕.

引理 6.3.4 (6.3.1)是强超线性的，$\{u_n\}$，$\{v_n\}$，$\{w_n\}$和$\{\lambda_n\}$当 $n>T$ 是正数列，对某一正数 c，$\lambda_n\geqslant 1$，$u_n\geqslant cw_n$ 且

$$u_n\geqslant \lambda_n w_n\sum_{i=T}^{n}v_i f(i+1,u_i).$$

则

$$\sum_{i=T}^{\infty}\lambda_i v_i f(i+2, cw_i) < \infty.$$

证明　令

$$A_n = \sum_{i=t}^{n-1} v_i f(i+2, u_i), n \geqslant T.$$

由 (6.3.1)的强超线性性知,有 $\sigma>1$,使得 $f(\cdot, y)/y^\sigma$ 在$(0,\infty)$上非减.由中值定理可知

$$-\Delta A_n^{1-\sigma} = (\sigma-1)\xi^{-\sigma}\Delta A_n, A_n < \xi < A_{n+1}.$$

因此

$$\begin{aligned}
&-\Delta A_n^{1-\sigma} \geqslant (\sigma-1)A_{n+1}^{-\sigma}v_n f(n+2, u_n)\\
&= (\sigma-1)A_{n+1}^{-\sigma}v_n u_n^\sigma[u_n^{-\sigma}f(n+2, u_n)]\\
&\geqslant (\sigma-1)A_{n+1}^{-\sigma}v_n[\lambda_n w_n A_{n+1}]^\sigma(cw_n)^{-\sigma}f(n+2, cw_n)\\
&= (\sigma-1)v_n\lambda_n^{-\sigma}c^{-\sigma}f(n+2, cw_n)\\
&\geqslant (\sigma-1)v_n\lambda_n c^{-\sigma}f(n+2, cw_n).
\end{aligned}$$

求和则有

$$\infty > A_T^{1-\sigma} - A_n^{1-\sigma} \geqslant (\sigma-1)c^{-\sigma}\sum_{n=T}^{n-1}\lambda_n v_n f(n+2, cw_n).$$

证毕.

类似于§6.1,方程(6.3.1)等价于方程组

$$\begin{cases}\Delta^2 y_n = \dfrac{z_{n+1}}{r_{n+1}},\\ \Delta^2 z_n = -f(n+1, y_{\tau(n-1)}).\end{cases} \tag{6.3.2}$$

6.3.2　关于(6.3.1)的最终正解

由本章第二节的讨论,方程(6.2.1)的最终正解可分成两种类型.方程 (6.3.1) 的解也有类似的结果.

引理 6.3.5　设(H_1)和(H_2)成立,$\{y_n\}$是(6.3.1)的最终正解,

则$\{y_nz_n\Delta y_n\Delta z_n\}$非振动且$\Delta y_n>0$, $\Delta z_n>0$最终成立,其中$z_n=r_n\Delta^2 y_{n-1}$由(6.3.2)式定义.

证明:由$\{y_n\}$的正性,条件(H_2)及(6.3.2)式可知$\Delta^2 z_n<0$.由引理6.3.2知$\{z_n\}$和$\{\Delta z_n\}$非振动.而由(6.3.2)知$\{\Delta^2 y_n\}$非振动,再由引理6.3.2有$\{y_n\}$和$\{\Delta y_n\}$非振动.所以推出结论:$\{y_nz_n\Delta y_n\Delta z_n\}$非振动.

$\{\Delta z_n\}$最终必为正.否则有N和$\alpha>0$使得$n\geqslant N$时有$\Delta z_n<-\alpha$,于是有

$$z_{n+1}\leqslant z_N-\alpha(n+1-N), n\geqslant N.$$

因此

$$\Delta^2 y_n=\frac{z_{n+1}}{r_{n+1}}\leqslant\frac{\alpha}{r_{n+1}}\left(\frac{z_N}{\alpha}+N-n-1\right), n\geqslant N.$$

$$\Delta y_{n+1}\leqslant\Delta y_N+\alpha\sum_{k=N}^{\infty}\frac{1}{r_{k+1}}\left\{\frac{z_N}{\alpha}+N-k-1\right\}, n\geqslant N+1.$$

由(H_1)可知,$\lim\limits_{n\to\infty}\Delta y_n=-\infty$.这矛盾于$y_n>0$最终成立.

接下来证明$\{\Delta y_n\}$最终为正.有两种情况.首先考虑$\{z_n\}$最终为负.这时由(6.3.2)知$\Delta^2 y_n<0$最终成立.利用引理6.3.2有$\Delta y_n>0$最终成立.其次考虑$z_n>0$最终成立.注意到$\Delta z_n>0$因此有M及$\beta>0$使得$n\geqslant M$时,$z_{n+1}>\beta$.由(6.3.2),则有

$$\sum_{i=M}^{n-1}\frac{(i+1)\beta}{r_{i+1}}\leqslant\sum_{i=M}^{n-1}(i+1)\Delta^2 y_i=n\Delta y_n-M\Delta y_M-y_n+y_M.$$

由(H_1)可知,$\lim\limits_{n\to\infty}n\Delta y_n=\infty$.即$\{\Delta y_n\}$最终为正.证毕.

在(H_1)和(H_2)成立下,(6.3.1)的最终正解$\{y_n\}$有两种情况:

$$y_n>0, \Delta y_n>0, \Delta^2 y_n>0, \Delta(r_{n+1}\Delta^2 y_n)>0 \qquad (6.3.3)$$

和

$$y_n>0, \Delta y_n>0, \Delta^2 y_n<0, \Delta(r_{n+1}\Delta^2 y_n)<0. \qquad (6.3.4)$$

如果$\{y_n\}$是(6.3.1)的一个最终正解.显然有$c>0$使得$y_n>c$最终

成立.另一方面,对 (6.3.1) 从充分大的 N 到 $n-1$ 求和,则有

$$\Delta^2 y_n \leqslant \frac{b}{r_{n+1}} + \frac{a(n+1)}{r_{n+1}},$$

$$y_n \leqslant A + Bn + E\sum_{i=N}^{n-1}\sum_{j=N}^{i-1}\frac{1}{r_{j+1}} + F\sum_{i=N}^{n-1}\sum_{j=N}^{i-1}\frac{j-N+1}{r_{j+1}} \quad (6.3.5)$$

$$= A + Bn + E\sum_{i=N+1}^{n-1}\frac{(n-i)}{r_i} + F\sum_{i=N+1}^{n-1}\frac{(n-i)(i-N)}{r_i},$$

其中 a,b,A,B,E 和 F 是常数.令

$$\Gamma_n(N) = \sum_{i=N}^{n-1}\sum_{j=N}^{i-1}\frac{j-N+1}{r_{j+1}} = \sum_{i=N+1}^{n-1}\frac{(n-i)(i-N)}{r_i}, n \geqslant N \geqslant 0, \quad (6.3.6)$$

$$\Psi_n = \Gamma_n(0) = \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{k}\frac{i}{r_i} = \sum_{i=1}^{n-1}\frac{(n-i)i}{r_i}, n \geqslant 1. \quad (6.3.7)$$

显然,

$$\Delta\Psi_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{i}{r_i}, \quad \Delta^2\Psi_n = \frac{n+1}{r_{n+1}},$$

$$\Gamma_n(N) \leqslant \Gamma_n(0) = \Psi_n, n \geqslant N \geqslant 0.$$

这样,由(H_1)和(3.6.5)可知,

$$1 \leqslant \Gamma_n(N), n \leqslant \Gamma_n(N), \sum_{i=N+1}^{n-1}\frac{n-i}{r_i} \leqslant \Gamma_n(N)$$

对于所有大 n 成立.因此,

$$y_n \leqslant D\Gamma_n(N) \leqslant D\Psi_n$$

最终成立,其中 D 是某一正常数.于是有如下结果.

引理 6.3.6　设(H_1)和(H_2)成立,$\{y_n\}$是 (6.3.1) 的最终正解,则有正数 α 和 β 使得 $\alpha \leqslant y \leqslant \beta\Psi_n$ 最终成立,Ψ_n 由 (6.3.7) 定义.

我们称正数 α 是(6.3.1)最终正解$\{y_n\}$的渐近常数,如果满足 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \alpha$;如果有正常数 β,使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n}{\Psi_n} = \beta$,则称$\{y_n\}$渐近 Ψ_n.

引理 6.3.7 假设(H_1)和(H_2)成立，$\{y_n\}$是(6.3.1)的最终正解，则有 N 使得

$$y_n \geqslant \Gamma_n(N)\Delta(r_n\Delta^2 y_{n-1}),\ n \geqslant N, \tag{6.3.8}$$

其中 $\Gamma_n(N)$由(6.3.6)定义.

证明 由前所知或者(6.3.3)成立，或者(6.3.4)成立. 如果(6.3.3)成立，则有 N 使得$n \geqslant N$ 时，$\Delta^2 z_n \geqslant (n-N+1)\Delta^2 z_n < 0$. 于是，

$$z_{n+1} \geqslant \sum_{i=N}^{n}\Delta z_i \geqslant \sum_{i=N}^{n}\Delta z_n \geqslant (n-N+1)\Delta z_n,\ n \geqslant N.$$

因此

$$\Delta^2 y_n \geqslant \frac{n-N+1}{r_{n+1}}\Delta z_i,\quad n \geqslant N,$$

$$\Delta y_n \geqslant \sum_{i=N}^{n-1}\frac{i-N+1}{r_{i+1}}\Delta z_i,\quad n \geqslant N,$$

$$y_n > \sum_{i=N}^{n-1}\sum_{j=N}^{i-1}\frac{j-N+1}{r_{j+1}}\Delta z_j \geqslant \Gamma_n(N)\Delta z_{n-2} \geqslant \Gamma_n(N)\Delta z_n.$$

如果有 N 使得$n \geqslant N$ 时(6.3.4)成立，用 $\Gamma_{n+1}(N)$乘(6.3.2)的第二式并求和

$$\begin{aligned}
0 &> \sum_{i=N}^{n-1}\Gamma_{i+1}(N)\Delta z_i \\
&= \Gamma_i(N)\Delta z_i\,|_{i=N}^{n} - \sum_{i=N}^{n-1}\Delta\Gamma_i(N)\Delta z_i \\
&= \Gamma_n(N)\Delta z_n - \sum_{i=N}^{n-1}\sum_{j=N}^{i-1}\frac{j-N+1}{r_{j+1}}\Delta z_i \\
&= \Gamma_n(N)\Delta z_n - \sum_{j=N}^{i-2}\frac{j-N+1}{r_{j+1}}z_i\,|_{i=N}^{n} + \sum_{i=N}^{n-1}\frac{i-N}{r_i}z_i \\
&= \Gamma_n(N)\Delta z_n - \sum_{j=N}^{n-2}\frac{j-N+1}{r_{j+1}}z_n + \sum_{i=N}^{n-1}(i-N)\Delta^2 y_{i-1}
\end{aligned}$$

$$\geqslant \Gamma_n(N)\Delta z_n + \sum_{i=N}^{n-1}(i-N)\Delta^2 y_{i-1}$$

$$= \Gamma_n(N)\Delta z_n + (i-N)\Delta y_{i-1}\Big|_{i=N}^{n} - \sum_{i=N}^{n-1}\Delta y_i$$

$$= \Gamma_n(N)\Delta z_n + (n-N)\Delta y_{n-1} - y_n + y_N$$

$$\geqslant \Gamma_n(N)\Delta z_n - y_n, \qquad n \geqslant N.$$

证毕.

定理 6.3.1 方程(6.3.1)是超线性的或者是次线性的,(H_1) 和 (H_2)成立, 则(6.3.1)存在渐近 Ψ_n 解的充要条件是

$$\sum_{i=T}^{\infty}|f(i+2, c\Psi_{\tau(i)})| < \infty, \tag{6.3.9}$$

其中 c 是非零常数, Ψ_n 由(6.3.7)定义.

证明 设$\{y_n\}$是(6.3.1)的最终正解且有 $\beta>0$ 使得$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n}{\Psi_n}=\beta$. 于是有 N 和a_1, a_2 使得

$$a_1\Psi_{\tau(n)} \leqslant y_{\tau(n)} \leqslant a_2\Psi_{\tau(n)}, \quad n \geqslant N.$$

如果 f 是超线性的, 则

$$\frac{f(n+2, a_1\Psi_{\tau(n)})}{a_1\Psi_{\tau(n)}} \leqslant \frac{f(n+2, y_{\tau(n)})}{y_{\tau(n)}},$$

$$f(n+2, y_{\tau(n)}) \geqslant \frac{y_{\tau(n)}}{a_1\Psi_{\tau(n)}} f(n+2, a_1\Psi_{\tau(n)}) \geqslant f(n+2, a_1\Psi_{\tau(n)}). \tag{6.3.10}$$

如果 f 是次线性的,则

$$f(n+2, y_{\tau(n)}) \geqslant \frac{y_{\tau(n)}}{a_1\Psi_{\tau(n)}} f(n+2, a_2\Psi_{\tau(n)})$$

$$\geqslant \frac{a_1}{a_2} f(n+2, a_2\Psi_{\tau(n)}). \tag{6.3.11}$$

另一方面, 由引理 6.3.5 知 $\Delta z_n>0$ 最终成立. 于是由(6.3.2)知

$$0 < \Delta z_{k+2} = \Delta z_{N+1} - \sum_{n=N}^{k} f(n+2, y_{\tau(n)}).$$

从而有

$$\sum_{n=N}^{\infty} f(n+2, y_{\tau(n)}) \leqslant \Delta z_{N+1} < \infty.$$

由(6.3.10)或(6.3.11)可知

$$\sum_{n=N}^{\infty} f(n+2, a_i \Psi_{\tau(n)}) < \infty.$$

相反 $c>0$ 时，设(6.3.9)成立.如果(6.3.1)是超线性的，令 $\rho=\frac{c}{2}$；如果(6.3.1)是次线性的，令 $\rho=c$，设 N 足够大，使得 $n \geqslant N$ 时 $\tau(n)>0$ 且

$$\sum_{i=N}^{\infty} f(i+2, c\Psi_{\tau(n)}) < \frac{\rho}{4}, \tag{6.3.12}$$

设 $M=\inf\{\tau(n) \mid n \geqslant N\}$，$\Omega$ 是所有实数列 $\{y_n\}_{n=M}^{\infty}$ 构成的集合，在其上定义范数

$$\| y \| = \sup_{n \geqslant M} \frac{|y_n|}{\Psi_n^2} < \infty,$$

$$S = \{\{y_n\} \in \Omega \mid \rho\Psi_n \leqslant y_n \leqslant 2\rho\Psi_n, n \geqslant M\}.$$

显然 S 是有界闭凸集.在 Ω 上定义算子

$$(Ty)_n = \rho\Psi_n, \quad M \leqslant n < N,$$

$$(Ty)_n = \rho\Psi_n + \Psi_n \sum_{i=n-1}^{\infty} F(i) + \sum_{i=N-2}^{n-2} \Psi_{i+1} F(\tau)$$

$$+ \sum_{i=N}^{n-2} \sum_{j=N}^{i} F(j)\Delta\Psi_j + \sum_{k=N}^{n-2} \sum_{i=N}^{k} \frac{1}{r_{i=1}} \left\{ \sum_{k=N}^{i} jF(j) \right\}$$

$$= \rho\Psi_n + \Psi_n \sum_{i=n-1}^{\infty} F(i) + \sum_{i=N-2}^{n-2} \Psi_{i+1} F(i)$$

$$+ \sum_{j=N}^{n-2} \left\{ \sum_{i=1}^{j} \frac{i}{r_i} \right\} (n-1-j) F(j) + \sum_{j=N}^{n-2} \left\{ \sum_{i=j}^{n-1} \frac{n-1-i}{r_{i+1}} \right\} jF(j),$$

$$n \geqslant N, \qquad (6.3.13)$$

其中 $F(k) = f(k, y_{\tau(k-\tau)})$.

首先我们证明 $TS \subseteq S$, 对于 $y \in S$, 由 (6.3.12) 和 (6.3.13)可知$(Ty)_n \geqslant \rho\Psi_n, n \geqslant M$. $n \geqslant N$ 时有

$$(Ty)_n \leqslant \rho\Psi_n + \Psi_n \sum_{i=n-1}^{\infty} F(i) + \Psi_n \sum_{i=N-2}^{n-2} F(i)$$

$$+ \sum_{j=N}^{n-2} \left\{ \left[\sum_{i=1}^{j} \frac{i}{r_i} \right] (n-j-1) + \left[\sum_{i=j}^{n-1} \frac{n-i-1}{r_{i+1}} \right] j \right\} F(j)$$

$$\leqslant \rho\Psi_n + \Psi_n \sum_{j=n-1}^{\infty} F(j) + \Psi_n \sum_{j=N-2}^{n-2} F(j) + \Psi_n \sum_{j=N}^{n-2} F(j)$$

$$\leqslant \rho\Psi_n + 3\Psi_n \sum_{j=N-2}^{\infty} F(j) \leqslant 2\rho\Psi_n.$$

设 $\{y^{(m)}\} \subset S$, $\lim_{m \to \infty} y^{(m)} = y$, 则有

$$|(Ty^{(m)})_n - (Ty)_n| \leqslant 3\Psi_n \sum_{j=N-2}^{\infty} |f(j, y^{(m)}_{\tau(j-2)}) - f(j, y_{\tau(j-2)})|,$$

$$n \geqslant N.$$

于是

$$\| Ty^{(m)} - Ty \| \leqslant \frac{3}{\Psi_N} \sum_{j=N-2}^{\infty} |f(j, y^{(m)}_{\tau(j-2)}) - f(j, y_{\tau(j-2)})|.$$

因为

$$\lim_{m \to \infty} |f(j, y^{(m)}_{\tau(j-2)}) - f(j, y_{\tau(j-2)})| = 0,$$

$$|f(j, y^{(m)}_{\tau(j-2)}) - f(j, y_{\tau(j-2)})| \leqslant 4f(j, c\Psi_{\tau(j-2)}), j \geqslant N.$$

由 Lebesgue 控制收敛定理可知

$$\lim_{m \to \infty} \| Ty^m - Ty \| = 0.$$

最后我们证明 $T(S)$是一致 Cauchy 的. 为此, 任取 $\varepsilon > 0$ 设 $m > n$, 由 (6.3.12) 和 (6.3.13)可知

$$\left|\frac{(Ty)_m}{\Psi_m^2}-\frac{(Ty)_n}{\Psi_n^2}\right|\leqslant\frac{2\rho}{\Psi_n}+\frac{6}{\Psi_n}\sum_{i=N}^{\infty}f(i+z,y_{\tau(i)})\leqslant\frac{4\rho}{\Psi_n}\to 0.$$

于是，有整数 p 使得 $n,m\geqslant p$ 时有

$$\left|\frac{(Ty)_m}{\Psi_m^2}-\frac{(Ty)_n}{\Psi_n^2}\right|<\varepsilon.$$

这样，由 Cheng 和 Patula 定理可知有 $y\in S$ 使 $Ty=y$，y 也是(6.3.1)的一个解.确实，由(6.3.13)可知

$$\Delta y_n=\rho\Delta\Psi_n+\Delta\Psi_n\sum_{i=n}^{\infty}F(j)+\sum_{j=N}^{n-1}F(j)\Delta\Psi_j+\sum_{i=N}^{n-1}\frac{1}{r_{i+1}}\sum_{j=N}^{i}jF(j),$$

$$\Delta^2 y_n=\rho\Delta^2\Psi_n+\Delta^2\Psi_n\sum_{i=n+1}^{\infty}F(i)+\frac{1}{r_{n+1}}\sum_{j=N}^{n}jF(j)$$

$$=\frac{(n+1)\rho}{r_{n+1}}+\frac{n+1}{r_{n+1}}\sum_{i=n+1}^{\infty}F(i)+\frac{1}{r_{n+1}}\sum_{j=N}^{n}jF(j),$$

$$\Delta(r_{n+1}\Delta^2 y_n)=\rho+\sum_{i=n+2}^{\infty}F(i),$$

$$\Delta^2(r_{n+1}\Delta^2 y_n)=-F(n+2)=-f(n+2,y_{\tau(n)}).$$

另一方面，由定理 6.3.1 可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{\Psi_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\Delta y_n}{\Delta\Psi_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\Delta^2 y_n}{\Delta^2\Psi_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{r_{n+1}\Delta^2 y_n}{n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\Delta(r_{n+1}\Delta^2 y_n)=\lim\left\{\rho+\sum_{i=n+2}^{\infty}f(i,y_{\tau(i-2)})\right\}=\rho.$$

证毕.

定理 6.3.2 方程(6.3.1)是超线性或次线性的，(H_1)和(H_3)成立，则方程(6.3.1)有一个解 $\{y_n\}$ 满足 $\lim_{n\to\infty}y_n=\alpha\neq 0$ 的充要条件是

$$\sum_{i=T}^{\infty}\Psi_i|f(i,c)|<\infty, \tag{6.3.14}$$

其中 T 是某一整数，c 是非零常数.

证明 不失一般性，设 $\{y_n\}$ 是(6.3.1)的最终正解且满足 $\lim_{n\to\infty}y_n$

$=\alpha$ 这时自然有(6.3.4)成立且有正数 b_1 和 b_2 使

$$b_1 \leqslant y_{\tau(n)} \leqslant b_2, \quad n \geqslant N,$$

且

$$y_n > 0, z_n < 0, \Delta y_n > 0, \Delta z_n > 0, \quad n \geqslant N.$$

于是，当 f 是超线性时有 $f(n+2, y_{\tau(n)}) \geqslant \frac{b_1}{b_2} f(n+2, b_2)$，而 f 是次线性时 $f(n+2, y_{\tau(n)}) \geqslant \frac{b_1}{b_2} f(n+2, b_2)$. 这时注意到(6.3.2)式，则有

$$\sum_{i=N}^{n-1} \Psi_{i+2} f(i+2), y_{\tau(i)} = -\sum_{i=N}^{n-1} \Psi_{i+2} \Delta^2 z_{i+1}$$

$$= -\Psi_{i+2} \Delta z_{i+1} \big|_{i=N}^{n} + \sum_{i=N}^{n-1} \Delta \Psi_{i+2} \Delta z_{i+2}$$

$$= -\Psi_{n+2} \Delta z_{n+1} + \Psi_{N+2} \Delta z_{N+1} + \sum_{i=N}^{n-1} \Delta \Psi_{i+2} \Delta z_{i+2}$$

$$= -\Psi_{n+2} \Delta z_{n+1} + \Psi_{N+2} \Delta z_{N+1} + z_{i+2} \Delta \Psi_{i+2} \big|_{i}^{n}{}_{N} - \frac{i+3}{r_{i+3}} z_{i+3}$$

$$= -\Psi_{n+2} \Delta z_{n+1} + \Psi_{N+2} \Delta z_{N+1} + z_{n+2} \Delta \Psi_{n+2} - z_{N+2} \Delta \Psi_{N+2}$$

$$- \sum_{i=N}^{n-1} (i+3) \Delta_2 y_{i+2}$$

$$\leqslant \Psi_{N+2} \Delta z_{N+1} - z_{N+2} \Delta \Psi_{N+2} - \sum_{i=N}^{n-1} (i+3) \Delta^2 y_{i+2}$$

$$\leqslant \Psi_{N+2} \Delta z N + 1 - z_{N+2} \Delta \Psi_{N+2} + (N+3) \Delta y_{N+2} + y_{N+3}.$$

所以

$$\sum_{i=N}^{\infty} \Psi_{i+2} f(i+2, y_{\tau(i)}) < \infty.$$

于是有

$$\sum_{i=N}^{\infty} \Psi_{i+2} f(i+2, b_i) < \infty.$$

相反,设有 $M>N$ 使得对某 $c>0$ 有

$$\sum_{i=M}^{\infty}\Psi_{i+2}f(i+2,c)<\frac{\alpha}{4},$$

其中 f 是超线性时 $\alpha=\frac{\beta}{2}$, f 是次线性时 $\alpha=\beta$, Ω 是形如 $\{y_n\}_{n=N}^{\infty}$ 的有界实数列构成的集合并取上确界范数.

$$S=\{y\in\Omega\,|\,\alpha\leqslant y_n\leqslant 2\alpha,n\geqslant M\}.$$

显然 S 是 Ω 的有界闭凸集, 在 S 上定义如下算子 T:

$$(Ty)_n=\alpha+\Psi_{n-1}\sum_{i=n-1}^{\infty}F(i)+\sum_{i=N-1}^{n-1}\Psi_{i-1}F(i-1)$$
$$+n\sum_{j=n-1}^{\infty}\sum_{i=n-1}^{j}\frac{j-i}{r_{i+1}}F(j+1)+\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=n-1}^{\infty}\frac{i(j-n+2)}{r_i}F(j+1),$$
$$(Ty_n)=(Ty)_N,N\leqslant n\leqslant M.$$

类似于定理 6.3.1 的证明, T 在 S 上是封闭的, 连续的和一致 Cauchy 的. 因此, T 在 S 上有不动点 y. 事实上, y 也是(6.3.1)的一个解. 这是因为

$$\Delta y_n=\Delta(Ty)_n$$
$$=-F(n-1)\Psi_{n-1}+\Delta\Psi_{n-1}\sum_{i=n}^{\infty}F(i)+\Psi_{n-1}F(n-1)$$
$$+n\left\{\frac{-1}{r_n}\sum_{k=n}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty}F(j+1)\right\}+\sum_{i=n}^{\infty}\sum_{j=i}^{\infty}\frac{j-i}{r_{i+1}}F(j+1)$$
$$-\Delta\Psi_{n-1}\sum_{j=n-1}^{\infty}F(j+1)+\Delta^2\Psi_{n-1}\sum_{i=n}^{\infty}\sum_{j=i}^{\infty}F(j+1)$$
$$=\sum_{i=n}^{\infty}\sum_{j=i}^{\infty}\frac{j-i}{r_{i+1}}F(j+1),$$
$$\Delta^2 y_n=-\sum_{j=n}^{\infty}\frac{j-n}{r_{n+1}}F(j+1),$$

$$\Delta(r_{n+1}\Delta^2 y_n) = \sum_{j=n+1}^{\infty} F(j+1),$$

$$\Delta^2(r_{n+1}\Delta^2 y_n) = -F(n+2) = -f(n+2, y_{\tau(n)}).$$

同时，$y_n \geqslant \alpha, \Delta y_n > 0$. 于是，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \mu \in [\alpha, 2\alpha]$. 证毕.

6.3.3 振动定理

这里关心 (6.3.1) 的振动性，其中 f 是强超线性的或强次线性的，同时为方便起见，令 $g(n) = \min\{\tau(n), n\}$.

定理 6.3.3 设(6.3.1)是强次线性的，(H_1)和(H_3)成立，对某一 $c \neq 0$ 有

$$\sum_{i=N}^{\infty} \frac{\Gamma_{g(i)}(N)}{\Psi_{\tau(i)}} \left| f(i+2, c\Psi_{\tau(i)}) \right| = \infty, \tag{6.3.15}$$

则(6.3.1)振动，其中 Γ 和 Ψ 由前定义.

证明 设方程(6.3.1)有一个最终正解 $\{y_n\}$，由引理 6.3.5 可知，有 N 使得 $n \geqslant N$ 时 $y_n > 0, \Delta y_n > 0, \Delta z_n > 0$. M 足够大使得 $i \geqslant M$ 时 $g(i) \geqslant N$. 由(6.3.2)知

$$\Delta z_{n+1} \geqslant \sum_{i=n}^{\infty} f(i+2, y_{\tau(i)}). \tag{6.3.16}$$

由引理 6.3.7 可知，$n \geqslant M$ 时，

$$y_{\tau(n)} \geqslant y_{g(n)} \geqslant \Gamma_{g(n)}(N) z_{g(n)} \geqslant \Gamma_{g(n)(N)} \Delta z_n. \tag{6.3.17}$$

因此

$$y_{\tau(n)} \geqslant \Gamma_{g(n)}(N) \sum_{i=n-1}^{\infty} f(i+2, y_{\tau(i)}), \quad n \geqslant M. \tag{6.3.18}$$

而由引理 6.3.6 可知 $y_n \leqslant \beta \Psi_n$ 最终成立. 应用引理 6.3.3 和 (6.3.18)，则有

$$u_n = y_{\tau(n)}, \mu_n = \frac{\Gamma_{g(n)}(N)}{\Psi_{\Psi(n)}}, \omega_n = \Psi_{\tau(n)}, v_n = 1,$$

$$\sum_{i=N}^{\infty} \frac{\Gamma_{g(i)}(N)}{\Psi_{\tau(i)}} f(i+2, \beta\Psi_{\tau(i)}) < \infty.$$

这与(6.3.15)矛盾. 最终负解可类似证明. 证毕.

注意到 $f(\cdot, y)$ 在 $(0, \infty)$ 上的非减性, 则条件(6.3.15)可由

$$\sum_{i=N}^{\infty} |f(i+2, c\Psi_{g(i)})| = \infty \tag{6.3.19}$$

代替. 这是因为, $g_{(n)} \leqslant \tau_{(n)}$, $y_{g(n)} \leqslant y_{\tau(n)}$, 于是由(6.3.16)和(6.3.17)可知

$$\begin{aligned} y_{g(n)} &\geqslant \Gamma_{g(n)}(N) \sum_{i=n-1}^{\infty} f(i+2, y_{g(n)}) \\ &= \frac{\Gamma_{g(n)}(N)}{\Psi_{g(n)}} \Psi_{g(n)} \sum_{i=n-1}^{\infty} f(i+2, y_{g(n)}). \end{aligned}$$

由引理 6.3.3 则有

$$\sum_{i=N}^{\infty} \frac{\Gamma_{g(i)}(N)}{\Psi_{g(i)}} f(i+2, \beta\Psi_{g(i)}) < \infty.$$

而

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma_{g(n)}(N)}{\Psi_{g(n)}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\Gamma_n(N)}{\Psi_n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta^2\Gamma_n(N)}{\Delta^2\Psi_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-N}{n+1} = 1. \end{aligned} \tag{6.3.20}$$

于是

$$\sum_{i=N}^{\infty} f(i+2, \beta\Psi_{g(i)}) < \infty.$$

注意到 $\tau(n) \leqslant n$ 时, $g(n) = \tau(n)$. 于是由(6.3.20)可知, 条件(6.3.15)等价于

$$\sum_{i=N}^{\infty} |f(i+2, c\Psi_{\tau(i)})| = \infty, \tag{6.3.21}$$

则由定理 6.3.1 和定理 6.3.3 可知如下结果.

推论 6.3.1 设(6.3.1)是强次线性的且(H_1)和(H_3)成立，$\tau(n)\leqslant n$最终成立，则方程(6.3.1)振动的充要条件是(6.3.21)对任意非零常数 c 成立.

定理 6.3.4 方程(6.3.1)是强超线性的，(H_1)和(H_3)成立，$\tau(n)\geqslant n$是正的非减数列，

$$\sum_{i=N}^{\infty}\Psi_i\,|f(i+2,c)| = \infty \tag{6.3.22}$$

对所有非零常数 c 成立，则方程(6.3.1)振动.

证明 不失一般性，设$\{y_n\}$是(6.3.1)的最终正解，由引理 6.3.6，如果有 N 使得$n\geqslant N$时，

$$y_n>0,\quad \Delta y_n>0,\quad z_n>0,\quad \Delta^2 z_n<0,$$

于是就有 $y_n\geqslant y_N=c>0, n\geqslant N$. 从而

$$z_{n+1}\geqslant\sum_{i=N}^{n}\Delta z_i\geqslant\sum_{i=N}^{n}\Delta z_{n+3}\geqslant(n+1-N)\Delta z_{n+3},\quad n\geqslant N,$$

$$\Delta^2 y_n=\frac{z_{n+1}}{r_{n+1}}\geqslant\frac{n-N+1}{r_{n+1}}\Delta z_{n+3},$$

$$\begin{aligned}\Delta y_n&\geqslant\Delta y_N+\sum_{j=N}^{n-1}\frac{j-N+1}{r_{j+1}}\Delta z_{j+3}\\&\geqslant\Delta z_{n+2}\sum_{j=N}^{n-1}\frac{j-N+1}{r_{j+1}}\\&=\Delta z_{n+2}\Delta\Gamma_n(N),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_n&\geqslant y_N+\sum_{i=N}^{n-1}\Delta z_{i+2}\Delta\Gamma_i(N)\\&=\Gamma_{n-1}(N)\Delta z_n-\Gamma_N(N)\Delta z_{N+1}\\&\quad+\sum_{i=N}^{n-1}\Gamma_{i+1}(N)f(i+3,y_{\tau(i+1)})\\&\geqslant\sum_{i=N+1}^{n}\Gamma_i(N)f(i+2,y_{\tau(i)}).\end{aligned}$$

因 $n\leqslant\tau(n)$，则有 $y_n\leqslant y_{\tau(n)}$ 且

$$y_{\tau(n)}\geqslant\sum_{i=N+1}^{n}\Gamma_i(N)f(i+2,y_{\tau(i)}).\qquad(6.3.23)$$

如果有 N 使 $n\geqslant N$ 时 (6.3.4) 成立，则有

$$\begin{aligned}\sum_{i=N}^{n-1}\Gamma_{i-1}(N)\Delta^2z_{i+2}&=\Gamma_i(N)\Delta z_{i+2}|_{i=N}^{n}-\sum_{i=N}^{n-1}\Delta\Gamma_i(N)\Delta z_{i+2}\\&\geqslant-\sum_{i=N}^{n-1}\sum_{j=N}^{i-1}\frac{j-N+1}{r_{j+1}}\Delta z_{i+2}\\&=-\sum_{j=N}^{i-2}\frac{j-N+1}{r_{j+1}}\Delta z_{i+2}|_{i+N}^{n}\\&\quad+\sum_{j=N}^{n-1}\frac{i-N}{r_i}z_{i+2}\\&\geqslant\sum_{j=N}^{n-1}\frac{i-N}{r_i}z_i\geqslant\sum_{i=N}^{n-1}(i-N)\Delta^2y_{i-1}\\&=(i-N)\Delta y_{i-1}|_{i=N}^{n}-\sum_{i=N}^{n-1}\Delta y_i\\&=(n-N)\Delta y_{n+1}-y_n+y_N\geqslant-y_n.\end{aligned}$$

于是 (6.3.23) 也成立. 对 (6.3.23) 应用引理 6.3.3，则有

$$\sum_{i=N+1}^{\infty}\Gamma_i(N)f(i+2,c)<\infty.$$

由(6.3.20)可知这与(6.3.22)相矛盾. 证毕.

由定理 6.3.2 和定理 6.3.4，则有如下结果

推论 6.3.2 设(H_1)和(H_3)成立，(6.3.1)是强超线性的且 $\tau(n)\geqslant n$，则(6.3.1)振动的充要条件是

$$\sum_{i=N}^{\infty}\Psi_i|f(i,c)|=\infty$$

对所有非零常数 c 成立.

§6.4　高阶非线性差分方程的单调解

设$\{x(k)\}_{k=0}^{\infty}$是实数列，如果它满足

$$x(k)>0,(-1)^i\Delta^i x(k)\leqslant 0,1\leqslant i\leqslant n-1,$$

则称$\{x(k)\}$是一个单调数列. 例如下面的一个典型例子：

$$x(k)=1-\lambda^k,0<\lambda<1,k=0,1,2,\cdots.$$

一般地，我们有

$$x(k)>0,(\Delta x(k))^\gamma\geqslant 0,\Delta(p_1(k)(\Delta x(k))^\gamma)\geqslant 0,\cdots,$$

$$(-1)^n\Delta(p_{n-1}(k)\Delta(p_{n-2}(k)\Delta(\cdots\Delta(p_1(k)(\Delta x(k))^\gamma)\cdots)))\geqslant 0,$$

其中 $\gamma>0$, $\{p_1(k)\}$, $\{p_2(k)\}$, $\cdots$, $\{p_{n-1}(k)\}$是实数列. 我们也称满足如此条件的数列为单调数列.

本节中，我们将考察差分方程

$$\Delta(p_{n-1}(k)\Delta(p_{n-2}(k)\Delta(\cdots\Delta(p_1(k)(\Delta x(k))^\gamma\cdots)))+g(k)x^\gamma(k)=0 \tag{6.4.1}$$

和

$$\Delta(p_{n-1}(k)\Delta(p_{n-2}(k)\Delta(\cdots\Delta(p_1(k)(\Delta x(k))^\gamma\cdots)))+q(k)x^\gamma(k+\tau)=0 \tag{6.4.2}$$

的单调解，其中

(H_1)　n 是不小于 2 的整数，

(H_2)　γ 是一个正数，

(H_3)　$\{p_1(k)\}_{k=0}^{\infty}$, $\{p_2(k)\}_{k=0}^{\infty}$, $\cdots$, $\{p_{n-1}(k)\}_{k=0}^{\infty}$是正数列，

(H_4)　$\{g(k)\}_{k=0}^{\infty}$是有非零子列的实数列且 $k\geqslant 0$ 时

　　$(-1)^n g(k)\geqslant 0$,

(H_5)　τ 是非负整数.

设$\{x(k)\}$是(6.4.1)的一个单调解，令

$$x_1(k)=\frac{p_1(k)(\Delta x(k))^\gamma}{x^\gamma(k)},$$

则有

$$\frac{x(k+1)}{x(k)}=1+\left(\frac{x_1(k)}{p_1(k)}\right)^{\frac{1}{\gamma}},$$

$$\begin{aligned}\Delta x_1(k)&=\frac{p_1(k+1)(\Delta x(k+1))^\gamma}{x^\gamma(k+1)}-\frac{p_1(k)(\Delta x(k))^\gamma}{x^\gamma(k)}\\&=\frac{p_1(k+1)(\Delta x(k+1))^\gamma}{x^\gamma(k+1)}-\frac{p_1(k+1)(\Delta x(k+1))^\gamma}{x^\gamma(k)}\\&\quad+\frac{p_1(k+1)(\Delta x(k+1))^\gamma}{x^\gamma(k)}-\frac{p_1(k)(\Delta x(k))^\gamma}{x^\gamma(k)}\\&=\frac{p_1(k+1)(\Delta x(k+1))^\gamma}{x^\gamma(k+1)}\left[1-\left(\frac{x(k+1)}{x(k)}\right)^\gamma\right]\\&\quad+\frac{\Delta(p_1(k)(\Delta x(k))^\gamma)}{x^\gamma(k)}\\&=\frac{\Delta(p_1(k)(\Delta x(k))^\gamma)}{x^\gamma(k)}\\&\quad-\left\{\left[1+\left(\frac{x_1(k)}{p_1(k)}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right]^\gamma-1\right\}x_1(k+1).\end{aligned}$$

再令

$$x_2(k)=-\frac{p_2(k)\Delta(p_1(k)(\Delta x(k))^\gamma)}{x^\gamma(k)},$$

则

$$\Delta x_1(k)=-\frac{x_2(k)}{p_2(k)}-\left\{\left[1+\left(\frac{x_1(k)}{p_1(k)}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right]^\gamma-1\right\}x_1(k+1),$$

$$\begin{aligned}\Delta x_2(k)=&-\frac{\Delta(p_2(k)\Delta(p_1(k)(\Delta x(k))^\gamma))}{x^\gamma(k)}\\&\left\{\left[1+\left(\frac{x_1(k)}{p_1(k)}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right]^\gamma-1\right\}x_2(k+1),\end{aligned}$$

记

$$x_3(k) = \frac{p_3(k)\Delta(p_2(k)\Delta(p_1(k)(\Delta x(k))^\gamma))}{x^\gamma(k)},$$

则

$$\Delta x_2(k) = -\frac{x_3(k)}{p_3(k)} - \left\{\left[1 + \left(\frac{x_1(k)}{p_1(k)}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right]^\gamma - 1\right\} x_2(k+1).$$

归纳可知，如果令

$$x_i(k) = (-1)^{i+1}\frac{p_i(k)\Delta(p_{i-1}(k)\Delta(\cdots(p_1(k)(\Delta x(k))_\gamma)\cdots))}{x^\gamma(k)},$$

$$1 \leqslant i \leqslant n-1, \qquad (6.4.3)$$

则有

$$\Delta x_i(k) = -\frac{x_{i+1}(k)}{p_{i+1}(k)} - \left\{\left[1 + \left(\frac{x_1(k)}{p_1(k)}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right]^\gamma - 1\right\} x_i(k+1),$$

$$1 \leqslant i \leqslant n-2, \qquad (6.4.4)$$

$$\Delta x_{n-1}(k) = -(-1)^n g(k) - \left\{\left[1 + \left(\frac{x_1(k)}{p_1(k)}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right]^\gamma - 1\right\} x_{n-1}(k+1), \qquad (6.4.5)$$

为方便起见，我们设

$$H(x,y,z) = \left[1 + \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}}\right]^z - 1, \qquad (6.4.6)$$

$$f_i(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, p_1, \cdots, p_{n-1}, \gamma) = \frac{x_{i+1}}{p_{i+1}} + H(x_1, p_1, \gamma) x_i,$$

$$1 \leqslant i \leqslant n-2, \qquad (6.4.7)$$

$$f_{n-1}(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, p_1, \cdots, p_{n-1}, \gamma) = H(x_1, p_1, \gamma) x_{n-1}, \qquad (6.4.8)$$

$$X(k) = col(x_1(k), \cdots, x_{n-1}(k)),$$

$$P(k) = col(p_1(k), \cdots, p_{n-1}(k)),$$

$$F = col(f_1, \cdots, f_{n-1}).$$

这样,系统(6.4.4)－(6.4.5)可写成

$$\Delta X(k) + F(X)(k), X(k+1), P(k), \gamma) + G(k) = 0, k = 0,1\cdots, \tag{6.4.9}$$

其中 $G(k)=col(0,\cdots,0,(-1)^n g(k))$由前可知，如果(6.4.1)有一个单调解，则 $X(k)$满足(6.4.9).为了讨论 (6.4.1)，我们还需如下关系

$$\Delta X(k) + F(X)(k), X(k+1), P(k), \gamma) + G(k) \leqslant 0, k = 0,1\cdots, \tag{6.4.10}$$

其中向量的序由每一分量给出.注意到(6.4.4)－－(6.4.5)，我们对(6.4.10) 求和，则有

$$X(j) \geqslant \sum_{k=j}^{\infty}(6.4.11)F(X(k), X(k+1), \gamma) + \sum_{k=j}^{\infty}G(k), j \geqslant 0. \tag{6.4.11}$$

定理6.4.1 方程(6.4.1)有一个单调解当且仅当(6.4.11)有非负向量解$\{X(k)\}_{k=0}^{\infty}$.

证明 我们证明(6.4.11)有非负向量解 $X(k)$，则(6.4.1)有单调解.设 l_∞^{n-l}是所有向量$\{z(k)\}_{k=0}^{\infty}=col\{z_1(k),\cdots,z_{n-1}(k)\}$构成的集合，定义算子 $T:l_\infty^{n-1}\to l_\infty^{n-1}$如下：

$$(TZ)(j) = \sum_{k=j}^{\infty}F(Z(k), Z(k+1), P(k), \gamma) + \sum_{k=j}^{\infty}G(k), j \geqslant 0. \tag{6.4.12}$$

由(6.4.11)可知,$(TX)(j)\leqslant X(j), j\geqslant 0$.考虑序列 $X_0, X_1, \cdots$,其中

$$X_0(k) = \sum_{i=k}^{\infty}G(i), k \geqslant 0, \tag{6.4.13}$$

$$X_{m+1}(k) = (TX_m)(k), k \geqslant 0, m = 0,1,\cdots. \tag{6.4.14}$$

由 $H(x,y,z)$的单调性可知

$$X_0(k) \leqslant X_1(k) \leqslant \cdots \leqslant X_m(k) \leqslant \cdots \leqslant X(k), \quad k \geqslant 0, m \geqslant 1.$$

因此有 $Y=col(y_1,\cdots y_{n-1})$使得

$$Y(k)=\lim_{m\to\infty}X_m(k),k\geqslant 0.$$

对(6.4.12)式取极限，由 Lebesgue 控制定理，则有 $Y=TY$.

因为

$$y_{n-1}(j)=(-1)^n\sum_{k=1}^{\infty}g(k)>0,j\geqslant 0,$$

$$y_1(j)\geqslant\sum_{k=j}^{\infty}\left\{\frac{y_{y_{i+1}}(k)}{p_{i+1}(k)}+\left[\left(1+\left(\frac{y_1(k)}{p_1(k)}\right)^{\frac{1}{r}}\right)^r-1\right]y_i(k+1)\right\}>0,$$

容易看出，$x(0)=1$，

$$x(k+1)=x(k)\left\{1+\left(\frac{y_1(k)}{p_1(k)}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right\},k\geqslant 0.$$

确定解$\{x(k)\}$是(6.4.1)的单调解，证毕.

作为定理6.4.1的一个直接应用，我们可建立比较定理.为此，我们首先给出比较方程

$$\Delta(b_{n-1}(k)\Delta(b_{n-2}(k)\Delta(\cdots\Delta(b_1(k)(\Delta x(k)(\Delta x(k))^{\mu})\cdots)))+c(k)x^{\alpha}(k)=0 \qquad (6.4.15)$$

其中各种参数类似于方程(6.4.1).这样，由 H 的单调性可直接得出如下结果.

推论 6.4.1　如果 $\mu\leqslant r,1\leqslant i\leqslant n-1,k\geqslant 0$ 时，$p_i(k)\leqslant b_i(k)$且

$$(-1)^n\sum_{i=k}^{\infty}g(i)c(i)\leqslant(-1)^n\sum_{i=k}^{\infty}g(k),k\geqslant 0,$$

若方程(6.4.1)有一个单调解，则(6.4.15)也有一个单调解.

推论 6.4.2　假如$\{(-1)^ng(k)\}$可和且设

$$\Gamma(k)=\left(2(-1)^n\sum_{i=k}^{\infty}g(i)\right)^{\frac{1}{n-1}},k=0,1\cdots.$$

当 $\gamma>1$ 时，$\sum_{k=0}^{\infty}\left[1+\left(\frac{\Gamma(k)}{p_1(k)}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right]^{\gamma}\left(\frac{\Gamma(k)}{p_1(k)}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\leqslant\frac{1}{2\gamma}$；

当 $0<\gamma<1$ 时，

$$\sum_{k=0}^{\infty}[1+(\frac{\Gamma(k)}{p_1(k)})^{\frac{1}{r}}]\leqslant\frac{1}{2r},$$

而 $$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k)}{p_{i+1}(k)}\leqslant\frac{1}{2},1\leqslant i\leqslant n-2,$$

则 (6.4.11) 有一个非负解.

证明 令 $X(k)=col(\Gamma(k),\Gamma^2(k),\cdots,\Gamma^{n-1}(k)),k\geqslant 0$，则 $X(k)$满足方程(6.4.11).对于 $1\leqslant i\leqslant n-2$，

$$\begin{aligned}&\sum_{k=j}^{\infty}f_i(X(k),X(k+1),P(k),r)\\&=\sum_{k=j}^{\infty}\frac{\Gamma^{i+1}(k)}{P_{i+1}(k)}+\sum_{k=j}^{\infty}\left|[1+(\frac{\Gamma(k)}{P_1(k)})^{\frac{1}{r}}]^r-1\right|\Gamma^i(k+1)\\&\leqslant\Gamma^i(j)\sum_{k=j}^{\infty}\frac{\Gamma(k)}{p_{i+1}(k)}+\Gamma^i(j)\sum_{k=j}^{\infty}\left|[1+(\frac{\Gamma(k)}{p_1(k)})^{\frac{1}{r}}]^r-1\right|.\end{aligned}$$

注意到 Hardy 不等式

$$a\geqslant 0,b\geqslant 0,r>1,a^r-b^r\leqslant ra^{r-1}(a-b),$$
$$a\geqslant 0,b\geqslant 0,0<r\leqslant 1,a^r-b^r\leqslant rb^{r-1}(a-b),$$

则当 $\gamma>1$ 时

$$\begin{aligned}&\sum_{k=j}^{\infty}f_j(X(k),X(k+1),P(k),r)\\&\leqslant\Gamma^i(j)\sum_{k=j}^{\infty}\frac{\Gamma(k)}{p_{i+1}(k)}+\Gamma^i(j)\sum_{k=j}^{\infty}r[1+(\frac{\Gamma(k)}{p_1(k)})^{\frac{1}{r}}](\frac{\Gamma(k)}{p_1(k)})^{\frac{1}{r}}\\&\leqslant\Gamma^i(j)\cdot\frac{1}{2}+\Gamma^i(j)\cdot\frac{1}{2}=\Gamma^i(j),\end{aligned}$$

当 $0<\gamma\leqslant 1$ 时

$$\begin{aligned}&\sum_{k=j}^{\infty}f_i(X(k),X(k+1),P(k),r)\\&\leqslant\Gamma^i(j)\sum_{k=j}^{\infty}\frac{\Gamma(k)}{p_{i+1}(k)}+\Gamma^i(j\sum_{k=j}^{\infty})r[1+\frac{\Gamma(k)}{p_1(k)}]^{\frac{1}{r}}\leqslant\Gamma^i(j).\end{aligned}$$

类似地，也有

$$\sum_{k=j}^{\infty} f_{n-1}(X(k),X(k+1),P(k),r)+\sum_{k=j}^{\infty}(-1)g(k)=$$

$$\sum_{k=j}^{\infty}\left\{\left[1+\left(\frac{\Gamma(k)}{p_1(k)}\right)^{\frac{1}{r}}\right]^r-1\right\}\Gamma^{n-1}(k+1)+\frac{\Gamma^{n-1}(j)}{2}\leqslant\Gamma^{n-1}(j).$$

证毕.

对于方程(6.4.2)，我们采用相似的技巧，这时(6.4.5)变为
$\Delta x_{n-1}(k)$

$$=-(-1)^n g(k)\frac{x^r(k+1)}{x^r(k)}-\left\{\left[1+\left(\frac{x_1(k)}{p_1(k)}\right)^{\frac{1}{r}}\right]^r-1\right\}x_{n-1}(k+1).$$

而

$$\frac{x^r(k+1)}{x^r(k)}=\frac{x^r(k+c)}{x^r(k+c-1)}\cdot\frac{x^r(k+c-1)}{x^r(k+c-2)}\cdots\frac{x^r(k+1)}{x^r(k)}$$

$$=\prod_{i=k}^{k+c-1}[H(x_1(i),p_1(i),r)+1].$$

类似定理 6.4.1 的证明，则有如下定理.

定理 6.4.2 方程(6.4.2)有单调解的充要条件是

$$X(j)\geqslant\sum_{k=j}^{\infty}F(X(k),X(k+1),P(k),r)$$
$$+\sum_{k=j}^{\infty}\prod_{i=k}^{k+c-1}[H(x_1(i),p_1(i),r)+1]G(k)$$

有非负向量解.

由 H 的单调性，还可得到有如下结果.

推论 6.4.3 如果 $0\leqslant\xi\leqslant\tau$ 且(6.4.2)有单调解，则

$$\Delta(p_{n-1}(k)\Delta(p_{n-2}(k)\Delta(\cdots\Delta(p_1(k)(\Delta x(k)^r)\cdots))))$$
$$+g(k)x^r(k+\xi)=0$$

有单调解.

显然，方程(6.4.1)有单调解的充要条件是(6.4.13)和(6.4.14)定义的向量序列点点收敛，由此也可获得(6.4.1)无单调解的定理.

§6.5 高阶差分方程的振动性

为叙述上的方便，我们先引入一些记号.

$N=\{0,1,\ldots\}, N(a)=\{a,a+1,\ldots\}$,

$N(a,b)=\{a,a+1,\ldots,b\}$,

$G=\{g:N(k)\to N, k\in N, \lim\limits_{k\to\infty}g(k)=\infty\}$.

本节将考虑差分方程

$$\Delta^{a}y(k)+\delta p(k)f(y(g(k)))=0, \qquad (6.5.1)$$

其中，a 是正整数，$\delta=\pm1$，$p\in(N(k),\mathbf{R}^{+})$，$g\in G$，$f\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$，且满足 $u\neq0$ 时 $uf(u)>0$，f 是非减函数.

为了同(6.5.1)比较，我们也考虑方程

$$\Delta^{a}y(k)+\delta q(k)f(y(h(k)))=0 \qquad (6.5.2)$$

和

$$\Delta^{a}y(k)+\delta p(k)f(y(k))=0, \qquad (6.5.3)$$

其中 $q\in(N(k),\mathbf{R}^{+})$，$h\in G$ 且 $p\geqslant q$，$g\geqslant h$.

6.5.1 一些基本事实

首先，我们通过应用第一章中介绍的离散 Taylor 公式以及定理 1.2.2 可得

$$\Delta^{m}u(k)=\sum_{i=m}^{n-1}\frac{(z+i-m-1-k)^{(i-m)}}{(i-m)!}(-1)^{i-m}\Delta^{i}u(z)$$
$$-\frac{(-1)^{n-m-1}}{(n-m-1)!}\sum_{l=k}^{z-1}(l+n-m-1-k)^{(n-m-1)}\Delta^{n}u(l),$$

(6.5.4)

其中 $k\in N(a,z),z\in N(a),0\leqslant m\leqslant n-1$.

应用公式(6.5.4)可有如下结果:

引理 6.5.1　设 N 是正整数,$\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是实数列, $\{y_n\}$ 和 $\{\Delta^N y_n\}$ 是常号的且 $\{\Delta^N y_n\}$ 有非零子列. 如果 $n\geqslant 0$ 时 $y_n\Delta^N y_n\leqslant 0$,则对于 $j\in N(1,N-1)$, $\{\Delta^j y_n\}$ 最终常号且有 $k\in N(1,N-1)$ 使得 $(-1)^{N-k-1}=1, j\in N(0,k)$ 时, $y_n\Delta^j y_n>0$ 最终成立. $j\in N(k+1,N-1)$ 时,$(-1)^{j-1}y_n\Delta^j y_n>0$ 最终成立.

引理 6.5.2　N 是正整数, $\{y_n\}$ 是实数列且对于 $j\in N(0,N-1)$, $\{\Delta^j y_n\}$ 最终常号, $y_n\Delta^N y_n\geqslant 0$ 最终成立,则或者对于 $j\in N(1,N)$, $y_n\Delta^j y_n\geqslant 0$ 最终成立,或者有 $k\in N(0,N-2)$ 使得 $(-1)^{N-k}=1$,且对于 $j\in N(1,K)$ 有 $y_n\Delta^j y_n>0$ 最终成立,对于 $j\in N(k+1,N-2)$ 时 $(-1)^{j-k}y_n\Delta^j y_n>0$ 最终成立.

定义 6.5.1　设 $y(k)$ 是 (6.5.1) 的一个解, 如果有 $c\in N$ 使得

$$(-1)^i\Delta^i y(k)>0, 0\leqslant i\leqslant \alpha-1, k\in N(c),$$

则称 $y(k)$ 是超减的;如果有 $c\in N$ 使得

$$\Delta^i y(k)>0, 0\leqslant i\leqslant \alpha-1, k\in N(c),$$

则称 $y(k)$ 是超增的.

6.5.2　$\alpha=2n$ 和 $\delta=1$ 的情况

定理 6.5.1　设 $k\geqslant k_0\geqslant 0$ 时 $p(k)\geqslant q(k), g(k)\geqslant h(k)$,已知 (6.5.1) 有一个非振动解, 则 (6.5.2) 也有一个非振动解.

证明　设 $y(k)$ 是 (6.5.1) 的一个最终正解,于是由引理 6.5.1 可知有 $k_1\geqslant k_0$ 使得 $0\leqslant i\leqslant 2n-1$ 时,$\Delta^i y(k)$ 在 $N(k_1)$ 上是常号且有最大的 j 使得 $i\leqslant j$ 时 $\Delta^i y(k)>0$. 注意到 j 是奇数, 则 $1\leqslant j\leqslant 2n-1$. 设 $k_2\geqslant k_1$ 使 $k\in N(k_2)$ 时 $h(k)\geqslant k_1$. 由定理 1.2.2 可知

$$y(k)=y(k_2)+\sum_{i=1}^{j-1}\frac{(k-k_2)^{(i)}}{i!}\Delta^i y(k_2)$$

$$+\frac{1}{(j-1)!}\sum_{l=k_2}^{k-1}(k-l-1)^{j-1}\Delta^j y(l)$$

$$\geqslant y(k_2)+\frac{1}{(j-1)!}\sum_{l=k_2}^{k-1}(k-l-1)^{j-1}\Delta^j y(l),\quad k\in N(k_2). \tag{6.5.5}$$

另一方面，对于 $k\in N(k_2,2)$时，由 (6.5.4) 的引理6.5.1 可知

$$\Delta^j y(k)=\sum_{i=j}^{2n-1}\frac{(z+i-j-1-k)^{(i-j)}}{(i-j)!}(-1)^{i-j}\Delta^i y(z)$$

$$-\frac{(-1)^{2n-j-1}}{(2n-j-1)!}\sum_{l=k}^{z-1}(l+2n-j-1-k)^{(2n-j-1)}\Delta^{2n}y(l)$$

$$=\sum_{i=j}^{2n-1}\frac{(z+i-j-1-k)^{i-j}}{(i-j)}(-1)^{i-j}\Delta^i y(z)$$

$$+\frac{1}{(2n-j-1)!}\sum_{l=k}^{z-1}(l+2n-j-1-k)^{(2n-j-1)}p(l)f(y(g(l)))$$

$$\geqslant\frac{1}{(2n-j-1)!}\sum_{l=k}^{z-1}(l+2n-j-1-k)^{(2n-j-1)}p(l)f(y(g(l))).$$

于是

$$\Delta^j y(k)\geqslant$$

$$\frac{1}{(2n-j-1)!}\sum_{l=k}^{\infty}(l+2n-j-1-k)^{(2n-j-1)}p(l)f(y(g(l))),$$

$$k\in N(k_2). \tag{6.5.6}$$

由 (6.5.5) 和 (6.5.6) 可知

$$y(k)=y(k_2)+\frac{1}{(j-1)!(2n-j-1)!}\sum_{l=k_2}^{k-1}(k-i-1)^{(j-1)}$$

$$\times\Big[\sum_{\sigma=l}^{\infty}(\sigma+2n-j-1-l)^{(2n-j-1)}p(\sigma)f(y(g(\sigma)))\Big]$$

$$\geqslant y(k_2) + \frac{1}{(j-1)!(2n-j-1)!}\sum_{l=k_2}^{k-1}(k-i-1)^{(j-1)}$$

$$\times\Big[\sum_{\sigma=l}^{\infty}(\sigma+2n-j-1-l)^{(2n-j-1)}q(\sigma)f(y(h(\sigma)))\Big],$$

$$k \in N(k_2). \qquad (6.5.7)$$

现在来寻找(6.5.2)的解 ω，它满足 $y(k_2)\leqslant\omega(k)\leqslant y(k)$. 为此我们定义序列如下 $\{\omega_m(k)\}_{m=1}^{\infty}$.

$\omega_1(k) = y(k), \qquad k \in N(k_0),$

$\omega_{m+1}(k) = \omega_m(k), k \in N(k_0, k_2-1),$

$$\omega_{m+1}(k) = y(k_2) + \frac{1}{(j-1)!(2N-j-1)!}\sum_{l=k_2}^{k-1}(k-l-1)^{(j-1)}$$

$$\times\Big[\sum_{\sigma=l}^{\infty}(\sigma+2n-j-1-l)^{(2n-j-l)}q(\sigma)f(\omega_m(h(\sigma)))\Big],$$

$$k \in N(k_2). \qquad (6.5.8)$$

注意到(6.5.7)，归纳可证得

$$y(k_2) \leqslant \omega_{m+1}(k) \leqslant \omega_m(k), k \in N(k_2).$$

令 $\lim\limits_{m\to\infty}\omega_m(k)=\omega(k)$，对 (6.5.8) 取极限，即有

$$\omega(k) = y(k_2) + \frac{1}{(j-1)!(2n-j-1)!}\sum_{k=k_2}^{k-1}(k-i-1)^{(j-1)}$$

$$\times\Big[\sum_{\sigma=l}^{\infty}(\sigma+2n-j-1-l)^{(2n-j-l)}q(\sigma)f(\omega(h(\sigma)))\Big],$$

$$k \in N(k_2).$$

显然，$\omega(k)$也是 (6.5.2) 的一个解，证毕.

定理 6.5.2　设 $k \geqslant k_0 \geqslant 0$ 时 $g(k) - h(k) \geqslant 0$ 且有界，则 (6.5.1) 振动的充要条件是

$$\Delta^{2n}\omega(k) + p(k)f(\omega(h(k))) = 0 \qquad (6.5.9)$$

振动.

证明 设 (6.5.1) 有一个非振动解，由定理6.5.1 可知(6.5.9) 有一个非振动解.

相反,设(6.5.9)有一个最终正解 $\omega(k)$，则有 $k_1 \geqslant k_0$ 使得 $0 \leqslant i \leqslant 2n-1$时，$\Delta^i \omega(k)$ 在 $N(k_1)$ 上常号且设 j 是使得 $i \leqslant j$ 时 $\Delta^i \omega(k) > 0$的最大数,显然 j 是一个奇数. 注意到有 $M \in N$ 使得$k \in N(k_0)$时,$g(k)-h(k) \leqslant M$,则有 $k_2 \geqslant k_1$ 使得 $k \in N(k_2)$时 $g(k)-M \geqslant k_1$ 记$x(k)=\omega(k-M)$,由 ω 的单调性知

$$x(g(k)) = \omega(g(k)-M) \leqslant \omega(h(k)), k \in N(k_2). \tag{6.5.10}$$

类似(6.5.5)，则有

$$\omega(k) \geqslant \omega(k_2) + \frac{1}{(j-i)!}\sum_{k=k_2}^{k-1}(k-l-1)^{(j-1)}\Delta^j \omega(l+m),$$
$$k \in N(k_2). \tag{6.5.11}$$

注意到 (6.5.6)，则有

$$\Delta^j \omega(k+M) \geqslant$$
$$\frac{1}{(2n-j-1)!}\sum_{l=k+M}^{\infty}(l+2n-j-1-k-M)^{(2n-j-1)}p(l)f(\omega(h(l))). \tag{6.5.12}$$

于是有

$$\omega(k) \geqslant \omega(k_2) + \frac{1}{(j-1)!(2n-j-1)!}\sum_{l=k_2}^{k-1}(k-l-1)^{(j-1)}$$
$$\times \Big[\sum_{\sigma=l+M}^{\infty}(\sigma+2n-j-1-l-M)^{(2n-j-1)}p(\sigma)f(\omega(h(\sigma)))\Big],$$
$$k \in N(k_2),$$

$$x(k) = \omega(k-m)$$
$$\geqslant \omega(k_2) + \frac{1}{(j-1)!(2n-j-1)!}\sum_{l=k_2}^{k-M-1}(k-l-1-m)^{(j-1)}$$

$$\times \Big[\sum_{\sigma=l+M}^{\infty} (\sigma + 2n - j - 1 - l - M)^{(2n-i-1)} p(\sigma) f(x(g(\sigma))) \Big].$$

接下来的证明方法类似于定理 6.5.1. 证毕.

推论 6.5.1 如果 $|k-g(k)|$ 有界，则 (6.5.1) 与 (6.5.3) 的振动性是等价的.

例 6.5.1 差分方程

$$\Delta^4 y_k + \frac{24}{(k-1)(k+1)^2(k+2)(k+3)(k+4)} y(k) = 0$$

有非振动解 $k-\frac{1}{k}$，于是方程

$$\Delta^4 y_k + \frac{24}{(k-1)(k+1)^2(k+2)(k+3)(k+4)} y(g(k)) = 0$$

当 $k \geqslant g(k) \in G$ 或者 $|k-g(k)|$ 有界时也有最终正解.

6.5.2 $\alpha = 2n+1$ 和 $\delta = 1$ 的情况

定理 6.5.3 假设 $k \geqslant k_0 \geqslant 0$ 时 $p(k) \geqslant q(k), g(k) \geqslant h(k)$ 且 (6.5.1) 有非超减的最终正解，则 (6.5.2) 也有一个这样的解.

证明方法类似定理 6.5.1. 省略.

定理 6.5.4 设 $k \geqslant k_0 \geqslant 0$ 时 $g(k) - h(k) \geqslant 0$ 有界，则 (6.5.1) 有非超减最终正解的充要条件是

$$\Delta^{2n+1} w(K) + p(k) f(w(h(k))) = 0$$

有非超减最终正解.

证明方法类似定理 6.5.2. 省略.

6.5.3 $\alpha = 2n$ 和 $\delta = -1$ 的情况

定理 6.5.5 设 $K \geqslant k_0 \geqslant 0$ 时,

$$p(k) \geqslant q(k), g(k) \geqslant h(k),$$

若 (6.5.1) 有无界最终正解是非超增的，则 (6.5.2) 有同样的解.

证明 设是 (6.5.1) 满足题意的解. 则有 $k_1 \geqslant k_0$ 使得 $0 \leqslant i \leqslant$

$2n-1$时$\Delta^i y(k)$是常号的,且有最大的j使得$i\leqslant j$时$\Delta^i y(k)>0$. 由y的无界性可知$j\geqslant 2$,再由非超增性可知$j\neq 2n$. 接下来的证明类似于定理6.5.1. 其无界性和非超增性可直接证明. 证毕.

定理 6.5.6 $k\geqslant k_0\geqslant 0$时$g(k)-h(k)\geqslant 0$且有界,则(6.5.1)有无界最终正解是非超增的充要条件是方程

$$\Delta^{2n}w(k)-p(k)f(w(h(k)))=0$$

也有如此的解.

证明类似定理6.5.2. 省略.

6.5.4 $\alpha=2n+1$ 和 $\delta=-1$ 的情况

定理 6.5.7 $k\geqslant k_0\geqslant 0$时$p(k)\geqslant q(k)$, $g(k)\geqslant h(k)$, (6.5.1)有一个非超增的最终正解, 则 (6.5.2) 也有如此的解.

定理 6.5.8 $k\geqslant k_0\geqslant 0$时$g(k)-h(k)\geqslant 0$且有界, 则(6.5.1)有非超增最终正解当且仅当

$$\Delta^{2n+1}w(k)-p(k)f(w(h(k)))=0$$

有如此的解.

定理6.5.7和定理6.5.8的证明省略.

§6.6 偶数阶非线性差分方程

本节中将考虑偶数阶差分方程

$$\Delta^{2n}y(k-1)+q(k)f(y(k))=0, k=0,1,2\cdots, \quad (6.6.1)$$

其中$q(k)\geqslant 0$且有正的子列, $f\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})$是非减连续函数当$x\neq 0$时$xf(x)>0$且$f(-x)=-f(x)$.

定理 6.6.1 如果

$$\int_t^{\infty}\frac{\mathrm{d}y}{f(y)}<\infty, \int_{-t}^{-\infty}\frac{\mathrm{d}y}{f(y)}<\infty, \quad (6.6.2)$$

且

$$\sum_{k=N}^{\infty} k^{(2n-1)} q(k) = \infty, \tag{6.6.3}$$

则方程 (6.6.1) 振动.

证明. 设 $y(k)$是(6.6.1)的最终正解，则由(6.6.1)可知 $\Delta^{2n} y(k) \leqslant 0$. 由引理 6.5.1，存在奇数 m^* 满足 $m^* \leqslant 2n-1$ 且 $\Delta^j y(k) > 0$, $1 \leqslant j \leqslant m^*-1$ 和 $(-1)^{m^*+j} \Delta^j y(k) > 0$, $m^* \leqslant j \leqslant 2n-1$.

如果 $m^* = 1$，由充分大的 k 到∞对 (6.6.1)求和，则有

$$\Delta y(k-1) \geqslant \sum_{j=k}^{\infty} \frac{(j-k+2n-2)^{(2n-2)}}{(2n-2)!} q(j) f(y(j)).$$

由 $y(k)$和 f 的单调性可知

$$\frac{\Delta y(k-1)}{f(y(k))} \geqslant \sum_{j=k}^{\infty} \frac{(j-k+2n-2)^{(2n-2)}}{(2n-2)!} q(j). \tag{6.6.4}$$

下证

$$\sum_{k=N}^{\infty} \frac{\Delta y(k)}{f(y(k+1))} < \infty. \tag{6.6.5}$$

定义 $r(t) = y(k) + (t-k)\Delta y(k)$, $k \leqslant t \leqslant k+1$. 显然, $r(k) = y(k)$, $r(k+1) = y(k+1)$ 且 $r'(t) = \Delta y(k) > 0$ 因此,

$$\frac{\Delta y(k)}{f(y(k+1))}$$

$$= \int_k^{k+1} \frac{\Delta y(k)}{f(y(k+1))} \mathrm{d}t = \int_k^{k+1} \frac{r'(t)\mathrm{d}t}{f(y(k+1))} \leqslant \int_{y(k)}^{y(k+1)} \frac{\mathrm{d}r}{f(r)}.$$

由条件(6.6.2)可知

$$\sum_{k=N}^{\infty} \frac{\Delta y(k)}{f(y(k+1))} \leqslant \int_{y(N)}^{\infty} \frac{\mathrm{d}r}{f(r)} < \infty.$$

这样，由(6.6.4)和(6.6.5)有

$$\sum_{j=k}^{\infty} (j-k+2n-2)^{(2n-1)} q(j) < \infty.$$

这与(6.6.3)矛盾.

如果 $m^* > 1$，则由(6.6.1)有

$$\Delta^{2n-m^*}y(k-1) \geqslant \sum_{j=k}^{\infty} \frac{(j-k+m^*-1)^{(m^*-1)}}{(m^*-1)!}q(j)f(y(j)).$$

再对上式从充分大的 N 到 $k-1$ 求和 $2n-m^*-1$ 次，得到

$$\Delta y(k) \geqslant \frac{(k-N)^{(2n-2)}}{(2n-2)!}\sum_{j=k}^{\infty}q(j)f(y(j)).$$

因此

$$\frac{\Delta y(k)}{f(y(k+1))} \geqslant \frac{(k-N)^{(2n-2)}}{(2n-2)!}\sum_{j=k}^{\infty}q(j).$$

由(6.6.5)，得到

$$\sum_{k=N+2n}^{\infty} \frac{(k-N)^{(2n-2)}}{(2n-2)!}\sum_{j=k}^{\infty}q(j) < \infty. \tag{6.6.6}$$

再由

$$\sum_{i=2n+N}^{k-1} \frac{(i-N)^{2n-2}}{(2n-2)!}\sum_{j=i}^{\infty}q(j) = \sum_{i=2n+N}^{k-1}\frac{\Delta(i-N)^{(n-1)}}{(2n-1)!}\sum_{j=i}^{\infty}q(j)$$
$$\geqslant \sum_{i=2n+N}^{k-1}\frac{(i+l-N)^{(2n-1)}}{(2n-1)!}q(i),$$

于是有

$$\sum_{i=2n+N}^{k-1}\frac{(i+1-N)^{(2n-1)}}{(2n-1)!}q(i) < \infty.$$

这矛盾于(6.6.3). 证毕.

方程(6.6.1)当满足(6.6.2)是超线性的. 接下来考虑次线性的情况.

$$\Delta^{2n}y(k-1) + q(k)|y(k)|^{\lambda}\operatorname{sign}(y(k)) = 0, \quad \lambda \in (0,1). \tag{6.6.7}$$

定理 6.6.2 若

$$\sum_{i=N}^{\infty}q(i+1)(i^{(2n-1)})^{\lambda} = \infty, \tag{6.6.8}$$

则 (6.6.7) 振动.

证明 设 $\{y(k)\}$ 是(6.6.7)的最终正解，由引理 6.5.1 可知有

奇数 m 使得，$m\leqslant i\leqslant 2n-1$ 时 $(-1)^{m+i}\Delta^i y(k)>0$ 且 $1\leqslant i\leqslant m-1$ 时 $\Delta^i y(k)>0$. 注意到 $\Delta^{2n-1}y(k)>0$,逐次求和，则有 k_0 和正数 A 使得 $k\geqslant k_0$ 时 $y(k+1)\geqslant Ak^{(2n-1)}\Delta^{2n-1}y(k)$. 用 $(\Delta^{2n-1}y(k-1))^{\lambda}$ 除(6.6.7) 式，则有

$$\frac{\Delta^{2n}y(k-1)}{(\Delta^{2n-1}y(k-1))^{\lambda}}$$
$$=-q(k)\frac{y^{\lambda}(k)}{(\Delta^{2n-1}y(k-1))^{\lambda}}\leqslant -Aq(k)((k-1)^{(2n-1)})^{\lambda}.$$

由 (6.6.8) 及上式可知

$$\sum_{k=N}^{\infty}\frac{\Delta^{2n}y(k-1)}{(\Delta^{2n-1}y(k-1))^{\lambda}}=-\infty. \tag{6.6.9}$$

另一方面,令 $r(t)=\Delta^{2n-2}y(k)+(t-k)\Delta^{2n-1}y(k)$,显然,当 $k<t<l+1$ 时 $r'(t)=\Delta^{2n-1}y(k)>0, r(k)=\Delta^{2n-2}y(k), k<t<l+1$. 定义 $s(t)=r(t+1)-r(t)>0$,则 $s'(t)=\Delta^{2n-1}y(k+1)-\Delta^{2n-1}y(k)=\Delta^{2n}y(k)\leqslant 0$ 因此,当 $k<t<k+1$ 时,$s(t)\leqslant s(k)=r(k+1)-r(k)=\Delta^{2n-1}y(k)$. 于是,

$$\frac{\Delta^{2n}y(k)}{(\Delta^{2n-1}y(k))^{\lambda}}=\int_{k-1}^{k}\frac{\Delta^{2n}y(k)}{(\Delta^{2n-1}y(k))^{\lambda}}dt\geqslant\int_{k-1}^{k}\frac{ds(t)}{s^{\lambda}(t)}.$$

因此

$$\sum_{i=N}^{k}\frac{\Delta^{2n}y(i)}{(\Delta^{2n-1}y(i))^{\lambda}}\geqslant\int_{N}^{k}\frac{ds}{s^{\lambda}}=\frac{1}{1-\lambda}(s^{1-\lambda})\Big|_{N}^{k}$$

因为 $k^{1-\lambda}>0$. 这与 (6.6.9) 矛盾. 证毕.

设 $y(k)$是(6.6.1)的最终正解，则有偶数 k 使得 $0\leqslant j\leqslant k+1$ 时 $\Delta^j y(k)>0$ 且

$$\lim_{i\to\infty}\Delta^{k+1}y_i\geqslant 0,\ \lim_{i\to\infty}\Delta^j y_i=0(k+2\leqslant j\leqslant 2n-1).$$

对 (6.6.1) 从 i 到∞求和 $2n-k-2$ 次，则有

$$-\Delta^{k+2}y(i-1)$$

$$= \frac{1}{(2n-k-3)!}\sum_{j=i}^{\infty}(j-i+2n-k-3)^{2n-k+3}q(j)f(y(j)).$$

(6.6.10)

另一方面,

$$y_i \geqslant \frac{1}{(k-1)!}\sum_{j=N}^{i-k}(i-j-1)^{(k-1)}\Delta^k y(j).$$

于是，当 f 是线性的，注意到 $\Delta^k y(j)$ 的非减性，则有

$$-\Delta^{k+2}y(i-1) \geqslant \frac{\Delta^k y_i}{(2n-3)!}\sum_{j=i}^{\infty}(j-i+2n-3)^{(2n-3)}q(j).$$

令，$z_i = \Delta^k y_i$ 于是有如下结果：

定理 6.6.3 $N \geqslant 2$ 时且 f 是线性的，方程

$$\Delta^2 w(k-1) + \frac{1}{(2n-3)!}\sum_{j=k}^{\infty}(j-i+2n-3)^{(n-3)}q(j)w_k = 0.$$

振动，则 (6.6.1) 振动.

§6.7 高阶中立型差分方程的正解

考虑中立型非线性差分方程

$$\Delta^m(x_n - p_n x_{n-\tau}) + q_n f(x_{n-\sigma}) = 0, \quad n \geqslant 0 \qquad (6.7.1)$$

和对应的差分不等式

$$\Delta^m(x_n - p_n x_{n-\tau}) + q_n f(x_{n-\sigma}) \leqslant 0, \quad n \geqslant 0, \qquad (6.7.2)$$

其中 m 是正奇数，τ 是正整数，σ 是非负整数，$\{p_n\}$ 和 $\{q_n\}$ 是非负实数列且 $\{q_n\}$ 有正的子列，f 是 **R** 上的非减连续函数且 $x \neq 0$ 时有 $xf(x) > 0$.

6.7.1 基本引理.

引理 6.7.1 设有整数 N 使得

$$p_{N+j\tau} \leqslant 1, j = 0,1,2,\cdots, \qquad (6.7.3)$$

$\{x_n\}$是(6.7.2)的最终正解，令

$$y_n = x_n - p_n x_{n-\tau}, \tag{6.7.4}$$

则有 $\Delta^m y_n \leqslant 0, y_n > 0$.

证明　由 (6.7.2)和 (6.7.4)，知

$$\Delta^m y_n \leqslant -q_n f(x_{n-\sigma}) \leqslant 0(\text{不恒为零}).$$

从而，$\{\Delta^i y_n\}$恒号($i=0,1,\cdots,m-1$). 如果结论不成立，自然有 $y_n<0$,于是由引理6.5.2 可知 $\Delta y_n<0$ 故有 $\alpha>0$，使得 $y_n\leqslant -\alpha$ 最终成立. 即 $x_n\leqslant -\alpha + p_n x_{n-\tau}$最终成立. 不妨设 $n\geqslant N+N^*\tau$ 时上式成立，则由归纳可证

$$x_{N+j\tau+N^*\tau} \leqslant -j\alpha + x_{N+N^*\tau},$$

当 j 充分大时与$\{x_n\}$最终为正矛盾，证毕.

引理 6.7.2　k 是正整数,且或者 $p_n>0$ 或者 $\sigma>0$ 且向量$(q_n, q_{n+1},\cdots,q_{n+\sigma-1})\neq 0$ 对所有大 n 成立. 如果

$$x_n \geqslant p_n x_{n-\tau} + \sum_{i=n}^{\infty} \frac{(i-n+k-1)^{(k-1)}}{(k-1)!} q_i f(x_{i-\sigma}) \tag{6.7.5}$$

有正解$\{x_n\}_{n=N-\mu}^{\infty}$，则

$$y_n = p_n y_{n-\tau} + \sum_{i=n}^{\infty} \frac{(i-n+k-1)^{(k-1)}}{(k-1)!} q_i f(y_{i-\sigma}) \tag{6.7.6}$$

有正解$\{y_n\}_{n=N-\mu}^{\infty}$，其中 $\mu=\max(\tau,\sigma)$.

证明　Ω 是由实数列 $w=\{w_n\}_{n=N-\mu}^{\infty}$组成的集合.

定义如下算子 $T:\Omega\to\Omega$.

$$(Tw)_n = 1, N-\mu \leqslant n \leqslant N-1,$$

$$(Tw)_n = \frac{1}{x_n}\left[p_n x_{n-\tau} w_{n-\tau} + \sum_{i=n}^{\infty} \frac{(i-n+k-1)^{(k-1)}}{(k-1)!} q_i f(x_{i-\sigma} w_{i-\sigma})\right]$$

$$n \geqslant N.$$

定义 $w^{(0)}\equiv 1, w^{(j+1)}=Tw^{(j)}, j=0,1,\cdots$,由(6.7.5)归纳可知

$$0 \leqslant w_n^{(j+1)} \leqslant w_n^{(j)} \leqslant 1, n \geqslant N, j \geqslant 0.$$

于是有 $\lim\limits_{j\to\infty} w^{(j)} = w^*$ 且 $N-\mu \leqslant n \leqslant N-1$ 时 $w_n^* = 1$. 由 Lebegue 收敛定理有

$$w_n^* x_n = p_n w_{n-\tau}^* x_{n-\tau} + \sum_{i=n}^{\infty} \frac{(i-n+k-1)^{(k-1)}}{(k-1)!} q_i f(w_{i-\sigma}^* x_{i-\sigma}).$$

令 $y_n = w_n^* x_n, n \geqslant N-\mu$. 它显然是(6.7.6)的非负解，且当 $N-\mu \leqslant n \leqslant N-1$ 时 $y_n = x_n > 0$. 若有 n^* 使得 $N-\mu \leqslant n < n^*$ 时 $y_n > 0$, 而 $y_{n^*} = 0$, 则有

$$0 = y_{n^*} = p_{n^*} x_{n^*-\tau} + \sum_{i=n^*}^{\infty} \frac{(i-n^*+k-1)^{(k-1)}}{(k-1)!} q_i f(y_{i-\sigma}).$$

这与定理条件矛盾，证毕.

类似引理 6.7.2. 我们会有如下结果.

引理 6.7.3 若 $1 \leqslant m^* \leqslant m-1, c > 0$ 且

$$x_n \geqslant c + p_n x_{n-\tau} + \sum_{i=N}^{n-1} (n-i+1)^{(m^*-1)} \sum_{j=i}^{\infty} (j-i+m-m^*-1) q_j f(x_{j-\sigma}) \tag{6.7.7}$$

有正解 $\{x_n\}_{n=N-\mu}^{\infty}$, 则

$$y_n = c + p_n y_{n-\tau} + \sum_{i=N}^{n-1} (n-i+1)^{(m^*-1)} \sum_{j=i}^{\infty} (j-i+m-m^*-1) q_j f(y_{j-\sigma}) \tag{6.7.8}$$

有正解 $\{y_n\}_{n=N-\mu}^{\infty}$.

6.7.2 比较定理

首先，我们将给出方程 (6.7.1) 与对应的 (6.7.2) 存在正解的等价性.

定理 6.7.1 设 (6.7.3) 成立，且或者 $p_n > 0$ 或者 $\sigma > 0$ 且向量 $(q_n, q_{n+1}, \cdots, q_{n+\sigma-1}) \neq 0$ 对所有大 n 成立，那么方程(6.7.1)有最

终正解的充要条件是对应的差分不等式(6.7.2)有最终正解.

证明　"⇒"显然. 下证"⇐". 设(6.7.2)有最终正解$\{x_n\}$, y_n由(6.7.4)定义. 由引理6.7.1知$y_n>0$且

$$\Delta^m y_n \leqslant -q_n f(x_{n-\sigma}) \leqslant 0 \tag{6.7.9}$$

最终成立. 由引理6.5.1知, 有偶数m^*: $0\leqslant m^*\leqslant m-1$使得$\Delta^i y_n>0, i=0,1,\cdots,m^*, (-1)^i\Delta^i y_n>0, i=m^*+1,\cdots,m-1$, 若$m^*=0$由(6.7.9)有

$$y_n \geqslant \sum_{j=n}^{\infty}\frac{(j-n+m-1)^{(m-1)}}{(m-1)!}q_j f(x_{j-\sigma}).$$

即有

$$x_n \geqslant p_n x_{n-\tau} + \sum_{j=n}^{\infty}\frac{(j-n+m-1)^{(m-1)}}{(m-1)!}q_j f(x_{j-\sigma}).$$

由引理6.7.2可知, (6.7.6)有一个最终正解$\{y_n\}$. 它也是(6.7.1)的最终正解.

如果$2\leqslant m^*\leqslant m-1$由(6.7.9)从$n$到$\infty$求和$m-m^*$次, 有

$$\Delta^{m^*} y_n \geqslant \sum_{j=n}^{\infty}\frac{(j-n+m+m^*-1)^{(m-m^*-1)}}{(m-m^*-1)!}q_j f(x_{j-\sigma}).$$

再从充分大的N到$n-1$对上式求和m^*次, 有

$$y_n \geqslant y_N + \sum_{i=N}^{n-1}\frac{(n-i+1)^{(m^*-1)}}{(m^*-1)!}\sum_{j=i}^{\infty}\frac{(j-i+m-m^*-1)^{(m-1)}}{(m-m^*-1)!}q_j f(x_{j-\sigma}).$$

即有

$$x_n \geqslant y_N + p_n x_{n-\tau} + \sum_{i=N}^{n-1}\frac{(n-i+1)^{(m^*-1)}}{(m^*-1)!}\sum_{j=i}^{\infty}\frac{(j-i+m-m^*-1)^{(m-m^*-1)}}{(m-m^*-1)!}q_j f(x_{j-\sigma}).$$

由引理6.7.3可知(6.7.1)有最终正解. 证毕.

以下将获得比较结果，为此将考虑比较方程

$$\Delta^m(x_n - P_n x_{n-\tau}) + Q_n F(x_{n-\tau}) = 0, \tag{6.7.10}$$

其中 P_n, Q_n, F 同(6.7.1)中 p_n, q_n, f 满足类似条件.

定理 6.7.2 设有 N 使得

$$P_{N+j\tau} \leqslant 1, j = 0,1,\cdots, \tag{6.7.11}$$

$$P_n \geqslant p_n, Q_n \geqslant q_n, \tag{6.7.12}$$

$$x > 0, F(x) \geqslant f(x), \tag{6.7.13}$$

且或者 $p_n > 0$ 或者 $\sigma > 0$ 且向量$(q_n, q_{n+1}, \cdots, q_{n+\sigma-1}) \neq 0$ 对所有大 n 成立，那么如果(6.7.10)有最终正解，则(6.7.1)也有最终正解.

证明 设$\{x_n\}$是(6.7.10)的最终正解，令 $y_n = x_n - P_n x_{n-\tau}$. 由引理 6.7.1 可知，$y_n > 0$，则或者

$$x_n \geqslant P_n x_{n-\tau} + \sum_{j=i}^{\infty} \frac{(j-n+m-1)}{(m-1)!} Q_j F(x_{j-\sigma}),$$

或者

$$x \geqslant y_N + P_n x_{n-\tau} +$$
$$\sum_{i=N}^{n-1} \frac{(n-i+1)^{(m^*-1)}}{(m^*-1)!}$$
$$+ \sum_{j=i}^{\infty} \frac{(j-i+m-m^*-1)^{(m-m^*-1)}}{(m-m^*-1)!} Q_j F(x_{j-\sigma}).$$

由(6.7.12)和(6.7.13)知，或者

$$x_n \geqslant p_n x_{n-\tau} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(j-n+m-1)^{(m-1)}}{(m-1)!} q_j f(x_{j-\sigma}),$$

或者

$$x_n \geqslant y_N + p_n x_{n-\tau} +$$
$$\sum_{i=N}^{n-1} \frac{(n-i+1)^{(m^*-1)}}{(m^*-1)!}$$
$$+ \sum_{j=i}^{\infty} \frac{(j-i+m-m^*-1)^{(m-m^*-1)}}{(m-m^*-1)!} q_j f(x_{j-\sigma}).$$

这样，由引理 6.7.2 或引理 6.7.3 可知(6.7.1)有最终正解. 证毕.

注 6.7.1. 本节中的各种结果当 $p_n>0$ 时，$\sigma>0$ 显然也成立.

注 6.7.2. 当 $p_n\equiv 1,\tau=1$ 时，方程(6.7.1)则变成偶数阶时滞差分方程，因此，定理 6.7.1 对偶数阶差分方程也是事实.

由注 6.7.2 不难看出，当 $p_n\equiv 1,\tau=1$ 时，方程(6.7.1)与偶数阶差分方程有某种关系，因此，有如下结果：

定理 6.7.3 方程

$$\Delta^m(x_n-x_{n-\tau})+q_nf(x_{n-\sigma})=0 \tag{6.7.14}$$

有最终正解当且仅当

$$\Delta^{m+1}y_{n-1}+\frac{q_n}{\tau}f(y_n)=0 \tag{6.7.15}$$

有最终正解.

证明 不失一般性，我们仅证 $m=3$ 的情形.

充分性. 设 $y_n=x_n-x_{n-\tau}$ 则 $\Delta^3y_n\leqslant 0$ 由引理 6.7.1 可知 $y_n>0$ 这时有两种情况：

(i) $y_n>0,\Delta y_n<0,\Delta^2y_n>0$;

(ii) $y_n>0,\Delta y_n>0,\Delta^2y_n>0$.

首先考虑 $x_n\in(i)$这时有 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=k\geqslant 0$. 设 N 是充分大的整数，使当 $n\geqslant N-\tau$ 时，有 $x_n>0,y_n>0,\Delta y_n<0,\Delta^2y_n<0$, 设 $\underline{m}=\min\{x_n:n\in[N-\tau,\cdots,N]\}$, 则 $\underline{m}>0$. 对于 $n\in[N,\cdots,N+\tau-1]$有

$$x_n=y_n+x_{n-\tau}>\frac{1}{\tau}\sum_{i=n}^{n+\tau-1}y_i+\underline{m}.$$

由归纳可知，当 $n\in[N+l\tau,N+(l+1)\tau-1]$时，$x_n\geqslant\frac{1}{\tau}\sum\limits_{i=n-l\tau}^{n+\tau-1}y_i+\underline{m}$. 因此，$n\geqslant N+\tau$ 时有 $x_n\geqslant\frac{1}{\tau}\sum\limits_{i=N+\tau}^{n}y_i+\underline{m}$. 容易证明，对任意的 σ 存在$N^*\geqslant N+\tau$, 使得

$$x_{n-\sigma}\geqslant\frac{1}{\tau}\sum_{i=N^*}^{n}y_i+\underline{m},n\geqslant N^*.$$

设 $z_n=\frac{1}{\tau}\sum_{i=N^*}^{n}y_i$，则 $\tau\Delta^4 z_n=\Delta^3 y_{n+1}$ 且 $x_{n-\sigma}\geqslant z_n$. 因此

$$\Delta^4 z_{n-1}+\frac{q_n}{\tau}f(z_n)\leqslant\frac{1}{\tau}\Delta^3(x_n-x_{n-\tau})+\frac{q_n}{\tau}f(x_{n-\sigma})=0.$$

由定理 6.7.1 可知

$$\Delta^4 z_{n-1}+\frac{q_n}{\tau}f(z_n)=0 \tag{6.7.16}$$

有一个最终正解.

其次，考虑情况 $x_n\in(ii)$. 选择 N 充分大，当 $n\geqslant N-\tau$ 时，$x_n>0, y_n>0, \Delta y_n>0, \Delta^2 y_n>0$. $\underline{m}$ 如前定义，则当 $n\in[N,N+\tau-1]$时

$$x_n=y_n+x_{n-\tau}\geqslant\frac{1}{\tau}\sum_{i=n-\tau+1}^{n}y_i+\underline{m}.$$

归纳可知，对 $n\in[N+l\tau,N+(l+1)\tau-1]$时，有

$$x_n\geqslant\frac{1}{\tau}\sum_{i=n-(l-1)\tau-1}^{n}y_i+\underline{m}.$$

因此，可以得到

$$x_n\geqslant\frac{1}{\tau}\sum_{i=N}^{n}y_i+\underline{m},\ n\geqslant N+\tau. \tag{6.7.17}$$

分如下四种情况：

(1) $\sigma\leqslant 0$. 由(6.7.17)，有 $x_{n-\sigma}\geqslant\frac{1}{\tau}\sum_{i=\sigma}^{n}y_i+\underline{m}, n\geqslant N+\tau$. 令 $z_n=\frac{1}{\tau}\sum_{i=N}^{n}y_i$，则 $x_{n-\sigma}\geqslant z_n$ 且 $\tau\Delta z_n=y_{n+1}$. 因此

$$\tau\Delta^4 z_{n-1}+q_nf(z_n)\leqslant\Delta^3(x_n-x_{n-\tau})+q_nf(x_{n-\sigma})=0. \tag{6.7.18}$$

这意味着(6.7.16)有最终正解.

(2) $\sigma>0$ 且 $\lim_{n\to\infty}\Delta^2 y_n=k>0$，则 $\Delta y_n=kn+o(n)$. $y_n=\frac{kn^2}{2}+$

$o(n^2)$, $\sum_{i=N}^{n} y_i = \frac{k}{6}n^3 + o(n^3)$. 因此, 对一切充分大的 n, 有 $\sum_{i=n-\sigma+1}^{n} y_i < \sigma kn^2$. 由(6.7.17)可知

$$x_{n-\sigma} \geqslant \frac{1}{\tau}\sum_{i=N}^{n-\sigma} y_i + m \geqslant \frac{1}{\tau}\left[\sum_{i=N}^{n} y_i - \sigma kn^2\right] + m.$$

令 $z_n = \frac{1}{\tau}\left[\sum_{i=N}^{n} y_i - \sigma kn^2\right]$, 则 $z_n > 0$, $x_{n-\sigma} \geqslant z_n$ 和 $\tau\Delta^4 z_n = \Delta^3 y_{n+1}$ 因此, (6.7.18)成立, 导致(6.7.16)有正解.

(3) $\sigma > 0$, $\lim_{n\to\infty}\Delta^2 y_n = 0$ 和 $\lim_{n\to\infty}\Delta y_n = \infty$. 则 $\Delta y_n = o(n)$, $y_n = o(n^2)$, $n = o(y_n)$, $\sum_{i=N}^{n} y_i = o(n^3)$ 和 $n^2 = o(\sum_{i=N}^{n} y_i)$. 因此, $\sum_{i=n-\sigma+1}^{n} y_i < n^2$, 令 $z_n = \frac{1}{\tau}(\sum_{i=N}^{n} y_i - n^2)$, 则 $z_n > 0$ 和 $x_{n-\sigma} \geqslant z_n$. 类似(1)可证(6.7.16) 有正解.

(4) $\sigma > 0$, $\lim_{n\to\infty}\Delta^2 y_n = 0$ 和 $\lim_{n\to\infty}\Delta y_n = k > 0$, 则 $y_n = kn + o(n)$, $\sum_{i=N}^{n} y_i = \frac{kn^2}{2} + o(n^2)$. 因此, 对一切充分大的 n, 有 $\sum_{i=n-\sigma+1}^{n} y_i < 2\sigma kn$.

令 $z_n = \frac{1}{\tau}(\sum_{i=N}^{n} y_i - 2\sigma kn)$, 则 $z_n > 0$ 和 $x_{n-\sigma} \geqslant z_n$. 如前可证.

必要性. 设 $\{y_n\}$ 是 (6.7.16)的最终正解, 则 $\Delta^4 y_n \leqslant 0$ 由引理 6.5.1, 这时有两种情况:

(i) $\Delta y_n > 0, \Delta^2 y_n < 0, \Delta^3 y_n > 0$;

(ii) $\Delta y_n > 0, \Delta^2 y_n > 0, \Delta^3 y_n > 0$.

对 $y_n \in$ (i)时, 有 $\lim_{n\to\infty}\Delta y_n = k \geqslant 0$. 和 $\lim_{n\to\infty} y_n = l$ 则存在正整数 N 和 M, 当 $n \geqslant N - 2 - |\sigma|$ 时, 有 $y_n > M > 0$ 和 $\Delta y_n < M(2(2+|\sigma|))^{-1}$. 令

$$H_n = \begin{cases} \tau\Delta y_{n-1}, n \geqslant N, \\ 0, n \leqslant N-1, \end{cases}$$

则对任意整数 n，有 $H_n \geqslant 0$ 定义 $z_n = \sum_{i=0}^{\infty} H_{n-i\tau} \geqslant 0$. 明显地，$z_n - z_{n-\tau} = H_n$. 对于 $n \geqslant N$ 有 $z_n - z_{n-\tau} = \tau \Delta y_{n-1}$. 对于 $n \in [N, N+\tau-1]$，有 $z_n = \tau \Delta y_{n-1} + z_{n-\tau} \leqslant \sum_{i=n-\tau}^{n-1} \Delta y_i$. 归纳可得 $n \in [N + l\tau, N + (l+1)\tau - 1]$，有

$$z_n = \tau \Delta y_{n-1} + z_{n-\tau} \leqslant \sum_{i=n-l\tau}^{n-1} \Delta y_i.$$

因此，$z_n \leqslant \sum_{i=N}^{n-1} \Delta y_i, n \geqslant N$. 可以证明，对任何 σ，有

$$\begin{aligned} z_{n-\sigma} &\leqslant \sum_{i=N}^{n-1} \Delta y_i + (|\sigma| + 2)\max\{|\Delta y_i| : i \in [n, n+\sigma-1]\} \\ &\leqslant y_n - y_N + (|\sigma| + 2)\frac{M}{2(|\sigma| + 2)} \leqslant y_n - M + \frac{M}{2} \leqslant y_n, \\ &\qquad n \geqslant N. \end{aligned}$$

于是 $\quad \Delta^3(z_n - z_{n-\tau}) + q_n f(z_{n-\sigma}) \leqslant \tau \Delta^4 y_{n-1} + q_n f(y_n) = 0.$

因此，(6.7.14)有正解.

若 $y_n \in$ (ii)，则 $\lim_{n\to\infty} \Delta^3 y_n = k \geqslant 0$. 如前定义 H_n 和 z_n，则 $n \geqslant N$ 时，$z_n > 0$ 且 $z_n - z_{n-\tau} = \tau \Delta y_{n-1}$. 令 $M = \max\{y_n : n \in [n-\tau, N-1]\}$. 对于 $n \in [N, N+\tau-1]$，有

$$z_n = \tau \Delta y_{n-1} + z_{n-\tau} \leqslant \sum_{i=n}^{n+\tau-1} \Delta y_i \leqslant y_{n+\tau}.$$

$$z_n \geqslant \sum_{i=n-\tau}^{n-1} \Delta y_i + z_{n-\tau} \geqslant y_n - y_{n-\tau} \geqslant y_n - M.$$

归纳可证

$$y_n - M \leqslant z_n \leqslant y_{n+\tau}, n \geqslant N. \qquad (6.7.19)$$

因此

$$z_{n-\sigma} \leqslant y_{n+\tau-\sigma} = y_n - y_n + y_{n-\tau-\sigma}$$

$$= y_n + |\tau - \sigma|\max\{|\Delta y_i|: i \in [n, n+\tau-\sigma]\}. \quad (6.7.20)$$

下面分三种情况：

(1) 若 $k>0$，则 $\Delta^2 y_n = kn + o(n)$，$\Delta y_n = \frac{kn^2}{2} + o(n^2)$，$y_n = \frac{kn^3}{6} + o(n^3)$，$z_n = \frac{kn^3}{6} + o(n^3)$. 从(6.7.20)可知，$n \geqslant N$ 时有 $z_{n-\sigma} \leqslant y_n + k|\tau-\sigma|n^2$. 令 $\bar{z}_n = z_n - k|\tau-\sigma|(n+\sigma)^2 > 0$，$n \geqslant N$，则有 $\bar{z}_{n-\sigma} \leqslant y_n$ 和

$$\Delta^3(\bar{z}_n - \bar{z}_{n-\tau}) = \Delta^3(z_n - z_{n-\tau}) = \tau\Delta^4 y_{n-1}.$$

因此

$$\Delta^3(\bar{z}_n - \bar{z}_{n-\tau}) + q_n f(\bar{z}_n - \sigma) \leqslant \tau\Delta^4 y_{n-1} + q_n f(y_n) = 0,$$

于是

$$\Delta^3(x_n - x_{n-\tau})q_n f(x_{n-\sigma}) = 0 \quad (6.7.21)$$

有正解.

(2) 若 $k=0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\Delta^2 y_n = l$，则 $\Delta y_n = nl + o(n)$，$y_n = \frac{n_2 l}{2} + o(n^2)$ 和 $z_n = \frac{n^2 l}{2} + o(n^2)$. 因此，由(6.7.20)可知，$n \geqslant N$ 时有 $z_{n-\sigma} \leqslant y_n + z|\tau-\sigma|nl$. 当 $n \geqslant N$ 时，令 $z_n = z_n - 2|\tau-\sigma|l(n+\sigma) > 0$，则有 $y_n \geqslant \bar{z}_n - \sigma$，$n \geqslant N$. 类似(1)可知(6.7.21)有正解.

(3)若 $k=0$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\Delta^2 y_n = \infty$，则 $\Delta^2 y_n = o(n)$，$\Delta y_n = o(n^2)$，$n = o(\Delta y_n)$，$y_n = o(n^3)$，$n^2 = o(y_n)$，$z_n = o(n^3)$，$n^2 = o(z_n)$. 从(6.7.20)可知 $z_{n-\sigma} \leqslant y_n + |\tau-\sigma|n^2$. 定义 $\bar{z}_n = z_n - |\tau-\sigma|(n+\sigma)_2$，则 $\bar{z}_n > 0$ 和 $y_n \geqslant \bar{z}_{n-\sigma}$. 类似前面可证(6.7.21)有正解. 证毕.

6.7.3 单调正解

一个数列 $\{x_n\}$ 如果最终满足

$$x_n > 0, \Delta x_n \geqslant 0, \Delta^2 x_n \leqslant 0, \Delta^3 x_n \geqslant 0, \cdots, (-1)^k \Delta^{k+1} x_n \geqslant 0,$$

我们称其是单调的.一般地，给定一个正整数 τ 和数列 $\{p_n\}$，如果数列 $\{x_n\}$ 满足

$$x_n > 0, x_n - p_n x_{n-\tau} \geqslant 0, \quad \Delta(x_n - p_n x_{n-\tau}) \leqslant 0, \cdots,$$
$$(-1)^n \Delta^n (x_n - p_{n-\tau}) \geqslant 0,$$

这时称 $\{x_n\}$ 是单调的.

定理 6.7.4 如果定理 6.7.2. 的条件成立，且 (6.7.10) 有一个单调解，则 (6.7.1) 也有一个单调解.

定理 6.7.4 由定理 6.7.2 显知，证明省略.

由引理 6.5.1 显知如下结果成立.

引理 6.7.4 设 $\{u_n\}$ 是一有界恒号数列且 $u_n \Delta^m u_n \leqslant 0$ 对所有大 n 成立，$m > 1$ 是奇数，则 $(-1)^s u_n \Delta^s u_n \geqslant 0$ 对于 $s = 1, 2, \cdots, m$ 及所有大 n 成立.

由引理 6.7.1 及引理 6.7.4，我们有如下结果.

定理 6.7.5 $\{p_n\}$ 有界且满足(6.7.3)，则(6.7.1)的一个有界正解也是它的一个单调解.

定理 6.7.6 (6.7.3)成立，$\liminf\limits_{n\to\infty} f(x) \geqslant d > 0$ 且

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_n = \infty, \tag{6.7.22}$$

则 (6.7.1) 的最终正解也是它的单调解.

证明：设 $\{x_n\}$ 是 (6.7.1) 的最终正解，y_n 由 (6.7.4) 定义.则最终有 $y_n > 0, \Delta^m y_n \leqslant 0$. 由(6.7.22)可知

$$\lim_{n\to\infty} \Delta^{m-1} y_n = -\infty, \tag{6.7.23}$$

或

$$\lim_{n\to\infty} \Delta^{m-1} y_n = c. \tag{6.7.24}$$

如果(6.7.23)成立，这时自然有 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$. 这是一个矛盾. 因此必有(6.7.24)成立，从而可知 $c = 0$. 否则，或者有 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$ 或者

有 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$. 前者显然不可能，因此有 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. 对(6.7.1)求和，则有

$$c + \sum_{n=0}^{\infty} q_n f(x_{n-\sigma}) = \Delta^{m-1} y_0.$$

于是有 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q_n < \infty$，这与(6.7.22)矛盾. 这就证得 $\Delta^{m-1} y_n > 0$ 最终成立. 重复如上过程则可证得结论，证毕.

§6.8　奇数阶中立型差分方程最终正解的存在性.

本节中将考虑中立型差分方程

$$\Delta^m (x_n - p x_{n-\tau}) + q_n x_{n-\sigma} = 0, \tag{6.8.1}$$

其中，m 是正奇数，$\tau > 1$，$\sigma \geqslant 0$，$\{q_n\}$ 是实数列.

定理 6.8.1　设 $p \neq 1$ 且

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{m-1} |q_n| < \infty, \tag{6.8.2}$$

则方程(6.8.1)存在最终正解.

证明　我们将分五种情况证明. 为叙述方便引入记号

$$f(x) f(x-1) \cdots f(x-j+1) = f^{(j)},$$

$$x(x-1) \cdots (x-j+1) = x^{(j)}.$$

1°如果 $0 \leqslant p \leqslant 1$，选择 N 足够大使得

$$\frac{1}{(m-1)!} \sum_{k=N}^{\infty} k^{m-1} |q_k| \leqslant \frac{1-p}{4}.$$

令

$$\Omega = \{x \in l_0^{\infty} \mid 2(1-p)/3 \leqslant x_n \leqslant 4/3, n \geqslant 0\},$$

则 Ω 是 l_0^{∞} 的有界凸闭子集. 按如下定义算子 F：$n \geqslant N$ 时，

$$(Fx)_n = 1 - p + p x_{n-\tau} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(k-n+1)}{(m-1)} q_k x_{k-\sigma}, \tag{6.8.3}$$

对于 $0\leqslant n\leqslant N$ 时

$$(Fx)_n = (Fx)_N.$$

当 $x\in\Omega$ 时，有

$$(Fx_n)\leqslant 1-p+\frac{4p}{3}+\frac{4}{3}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(k-n+1)^{(m-1)_n}}{(m-1)!}|q_k|$$

$$\leqslant 1-p+\frac{4p}{+3}+\frac{4}{3}\sum_{k=N}^{\infty}\frac{k^{m-1}}{(m-1)!}|q_k|$$

$$\leqslant 1-p+\frac{4p}{+3}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1-p}{4}=\frac{4}{3},$$

$$(Fx)_n\geqslant 1-p-\frac{4}{3}\cdot\frac{1-p}{4}=\frac{2(1-p)}{3},n\geqslant N.$$

因此，有 $F\Omega\subseteq\Omega$.

当 $x,y\in\Omega,n\geqslant N$ 时，我们有

$$|(Fx)_n-(Fy)_n|$$

$$\leqslant p|x_{n-\tau}-y_{n-\tau}|+\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(k-n+1)^{(m-1)_n}}{(m-1)!}|q_k||x_{k-\sigma}-y_{k-\sigma}|$$

$$\leqslant\left(p+\frac{1-p}{4}\right)\|x-y\| = \frac{1+3p}{4}\|x-y\|.$$

即，F 是 Ω 上的压缩映射. 因此，由 Banach 压缩映射原理知 F 在 Ω 上有不动点 $x^*=\{x_n^*\}$. 它是(6.8.1)的一个最终正解.

2°如果 $p>1$，选择 N 使得

$$\frac{1}{(m-1)!}\sum_{k=N+\tau}^{\infty}k^{m-1}|q_k|\leqslant\frac{p-1}{4}.$$

这时令

$$\Omega=\{x\in l_0^{\infty}|p/2\leqslant x_n\leqslant 2p,n\geqslant 0\}.$$

定义算子，$n\geqslant N$ 时

$$(Fx)_n = p-1+\frac{x_{n+\tau}}{p}-\sum_{k=n+\tau}^{\infty}\frac{(k-n-\tau+1)^{(m-1)_n}}{(m-1)!p}q_kx_{k-\sigma},$$

$0\leqslant n\leqslant N$ 时 $(Fx)_n=(Fx)_N$. 类似 1° 可证 (6.8.1)有正解.

3°如果 $-1<p<0$ 时，选择 N 使得

$$\frac{1}{(m-1)!}\sum_{k=N}^{\infty}k^{m-1}|q_k|\leqslant\frac{1+p}{4}.$$

令

$$\Omega=\{x\in l_0^{\infty}\,|\,2(1+p)\leqslant x_n\leqslant 4,n\geqslant 0\}.$$

定义算子，$n\geqslant N$ 时

$$(Fx)_n=3-p+px_{x-\tau}+\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(k-n+1)^{(m-1)_n}}{(m-1)!}q_kx_{k-\sigma},$$

$0\leqslant n<N$ 时，$(Fx)_n=(Fx)_N$. 类似地，可证结论成立.

4°如果 $p<-1$，选择 N 使得

$$\frac{1}{(m-1)!}\sum_{k=N+\tau}^{\infty}k^{m-1}|q_k|\leqslant-\frac{1+p}{4}.$$

定义 $\Omega=\{x\in l_0^{\infty}\,|\,-2(1+p)\leqslant x_n\leqslant -4p,n\geqslant 0\}$.

$$(Fx)_n=1-3p+\frac{x_{n+\tau}}{p}-\sum_{k=n+\tau}^{\infty}\frac{(k-n-\tau+1)^{(m-1)_n}}{(m-1)!}q_kx_{k-\sigma},n\geqslant N,$$

$$(Fx)_n=(Fx)_N,0\leqslant n<N.$$

也可得结论成立.

5°如果 $p=-1$，选择 N 使得

$$\frac{1}{(m-1)!}\sum_{k=N+\tau}^{\infty}k^{m-1}|q_k|\leqslant\frac{1}{4}.$$

设 $\Omega=\{x\in l_0^{\infty}\,|\,2\leqslant x_n\leqslant 4,n\geqslant 0\}$.

$$(Fx)_n=3+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=n+(2i-1)\tau}^{n+2i\tau-1}\sum_{j=k}^{\infty}\frac{(j-k+1)^{(m-1)_k}}{(m-1)!}q_jx_{j-k},n\geqslant N,$$

$$(Fx)_n=(Fx)_N,0\leqslant n<N.$$

当 $x\in\Omega$ 时

$$(Fx)_n\leqslant 3+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=n+(2i-1)\tau}^{n+2i\tau-1}\sum_{j=k}^{\infty}\frac{(j-k+1)^{(m-1)_k}}{(m-1)!}4|q_j|$$

$$\leqslant 3+4\sum_{k=N+\tau}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty}\frac{(j-k+1)^{(m-1)_k}}{(m-1)!}|q_j|$$

$$\leqslant 3+4\sum_{k=N+\tau}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty}\frac{j^{m-1}}{(m-1)!}|q_j|$$

$$\leqslant 3+4\cdot\frac{1}{4}=4.$$

$$(Fx)_n\geqslant 3-4\sum_{k=N+\tau}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty}\frac{j^{m-1}}{(m-1)!}|q_j|\geqslant 2.$$

即有 $F\Omega\subseteq\Omega$.

对于 $x,y\in\Omega$，我们不难有

$$\|Fx-Fy\|\leqslant\frac{1}{4}\|x-y\|.$$

因此，F 在 Ω 上有不动点 $x^*=\{x_n^*\}$. 注意到

$$x_n^*+x_{n-\tau}^*=6+\sum_{k=n}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty}\frac{(j-k+1)^{(m-1)_k}}{(m-1)!}q_jx_{j-\sigma}^*,\ n\geqslant N+\tau.$$

因此

$$\Delta(x_n^*+x_{n-\tau}^*)=-\sum_{j=n}^{\infty}\frac{(j-k+1)^{(m-1)_k}}{(m-1)!}q_jx_{j-\sigma}^*,$$

且

$$\Delta^m(x_n^*+x_{n-\tau}^*)=-q_nx_{n-\sigma}$$

满足要求，证毕.

定理 6.8.2 设 $p=1, q_n\geqslant 0$，则(6.8.1)有有界最终正解的充要条件是

$$\sum_{n=0}^{\infty}n^mq_n<\infty. \tag{6.8.4}$$

证明 设 $x=\{x_n\}$ 是(6.8.1)的有界最终正解，则由引理 6.7.1 可知 $z_n=x_n-x_{n-\tau}$ 有界且最终为正. 显然为(6.8.1)的一个单调解. 对(6.8.1)求和，则有

$$z_n = x_n - x_{n-\tau} \geqslant \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(j-n+1)^{(m-1)_\tau}}{(m-1)!} q_j x_{j-\sigma}^*. \quad (6.8.5)$$

注意到由 $x_n - x_{n-\tau} > 0$ 可知有正数 c_1 使得 $x_n \geqslant c_1$ 最终成立.这样,由(6.8.5)可知

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^{m-1} q_k < \infty,$$

且

$$x_n \geqslant x_{n-\tau} + c_1 \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(j-n+1)^{(m-1)_\tau}}{(m-1)!} q_j$$

$$\geqslant x_{n-\tau} + c_1 \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{i=k}^{\infty} \frac{(i-k+1)\cdots(i-k+m-2)}{(m-2)!} q_i, n \geqslant N.$$

特别地,有

$$x_{N+l\tau+\sigma}$$

$$\geqslant x_{N+\sigma} + c_1 \sum_{j=1}^{l} \sum_{k=N+j\tau+\sigma}^{\infty} \sum_{i=k}^{\infty} \frac{(i-k+1)\cdots(i-k+m-2)}{(m-2)!} q_i.$$

注意到 x 的有界性,则有

$$\sum_{j=1}^{l} \sum_{k=N+j\tau+\sigma}^{\infty} \sum_{i=k}^{\infty} (i-k+1)\cdots(i-k+m-2) q_i < \infty.$$

由引理 3.6.1 可知

$$\sum_{k=N+\sigma}^{\infty} k^m q_k < \infty.$$

相反,令

$$q_n^* = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(k-n+1)(k-n+2)\cdots(k-n+m-2)}{(m-2)!} q_k,$$

由(6.8.4)及引理 3.6.1 可知

$$\sum_{i=0}^{\infty} i q_i^* < \infty, \quad \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=i\tau}^{\infty} q_i^* < \infty.$$

选择 T 使得

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=T+i\tau}^{\infty} q_k^* \leqslant 1.$$

令

$$H_n = \sum_{k=n}^{\infty} q_k^*, n \geqslant T,$$

$$H_n = \frac{(n-T+\tau)H_T}{\tau}, T-\tau \leqslant n < T,$$

$$H_n = 0, n < T-\tau.$$

显然 H_n 非负. 如果设 $w_n = \sum_{i=0}^{\infty} H_{n-i\tau}$, 那么 $n \geqslant T$ 时 $0 \leqslant w_n \leqslant 1$ 且 $w_n = w_{n-\tau} + H_n, n \geqslant 0$.

$$M = \{y \in l_0^\infty \mid 0 \leqslant y_n \leqslant 1, n \geqslant 0\},$$

$$(Fy)_n = \frac{y_{n-\tau}w_{n-\tau}}{w_n} + \frac{1}{w_n}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(k-n+)^{(m-1)_n}}{(m-1)!} q_k y_{k-\sigma} w_{k-\sigma}, n \geqslant T,$$

$$(Fy)_n = \frac{n+1}{T+1}(Fy)_T + \left(1 - \frac{n+1}{T+1}\right), 0 \leqslant n \leqslant T.$$

则

$$0 \leqslant (Fy)_n \leqslant \frac{w_{n-\tau}}{w_n} + \frac{1}{w_n}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(k-n+)^{(m-1)_n}}{(m-1)!} q_k w_{k-\sigma}$$

$$\leqslant \frac{1}{w_n}(w_{n-\sigma} + H_n) = 1, n \geqslant T.$$

即 $FM \subseteq M$. 由 Knaster 不动点定理可知, F 在 M 中有不动点 y^*. 令 $x_n = w_n y_n^*$, 它显然是(6.8.1)的一个正解. 证毕.

§6.9 高阶中立型差分方程非振动解的渐近分类

考虑非线性中立型差分方程

$$\Delta^m(x_n + px_{n-\tau}) + f(n, x_{n-\sigma}) = 0, n = 0,1,2,\cdots, \quad (6.9.1)$$

其中 $m\geqslant 2,\tau>0,\sigma\geqslant 0$ 是整数，p 是非负实数且不等于 1，f 是 $\mathbf{N}\times\mathbf{R}$ 上的实值函数，它关于第二变量连续且 $x\neq 0$ 时 $xf(n,x)>0$. 有时我们也要求 f 是超线性的或次线性的.

设 $\{x_n\}$ 是(6.9.1)的一个解，

$$z_n = x_n + px_{n-\tau}$$

称为 $\{x_n\}$ 的伴随序列.

引理 6.9.1　假设 $p\geqslant 0,p\neq 1,\{x_n/n^\alpha\}$ 是最终有界正的，α 是某非负整数. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n/n^\alpha$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n/n^\alpha = b/(1+p)$.

证明　不失一般性，可设 $n\geqslant 0$ 时 $x_n>0$. 令

$$Q = \limsup_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^\alpha},\quad q = \liminf_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^\alpha},$$

则有子列 $\{n(k)\}$ 和 $\{j(k)\}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n(k)}}{n^\alpha(k)} = Q,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{x_{j(k)}}{j^\alpha(k)} = q.$$

如果 $p\in[0,1)$，则

$$b = \lim_{n\to\infty}\frac{z_{n(k)}}{n^\alpha(k)} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n(k)} + px_{n(k)-\tau}}{n^\alpha(k)} \geqslant Q + pq,$$

$$b = \lim_{n\to\infty}\frac{z_{j(k)}}{j^\alpha(k)} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_{j(k)} + px_{j(k)-\tau}}{j^\alpha(k)} \geqslant q + pQ,$$

因此，$q+pQ\geqslant Q+pq$ 或者 $q\geqslant Q$ 但由定义可知 $Q\geqslant q$. 于是，$q=Q$.

如果 $p>1$，类似地有

$$b = \lim_{n\to\infty}\frac{z_{n(k)+\tau}}{(n(k)+\tau)^\alpha} \geqslant q + pQ,$$

$$b = \lim_{n\to\infty}\frac{z_{j(k)+\tau}}{(j(k)+\tau)^\alpha} \geqslant Q + pq.$$

因此，$Q+pq\geqslant q+pQ$ 或者 $q\geqslant Q$. 因此 $q=Q$.

最后

$$b = \lim_{n\to\infty}\frac{z_n}{n^{\alpha}} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n + px_{n-\tau}}{n^{\alpha}} = q + pq.$$

因此，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^{\alpha}} = q = \frac{b}{1+p}.$$

证毕.

6.9.1 非振动解的分类

我们将方程(6.9.1)的所有最终正解记为 S^+ 且采用如下记号.

$$E_j(\infty, *) = \left\{\{x_n\} \in S^+ \mid \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^{2j-2}} = \infty, \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^{2j-1}} \in (0,\infty)\right\}$$

$$= \left\{\{x_n\} \in S^+ \mid \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^{2j-1}} \in (0,\infty)\right\},$$

$$E_j(\infty,0) = \left\{\{x_n\} \in S^+ \mid \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^{2j-2}} = \infty, \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^{2j-1}} = 0\right\},$$

$$E_j(*,0) = \left\{\{x_n\} \in S^+ \mid \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^{2j-2}} \in (0,\infty), \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^{2j-1}} = 0\right\}$$

$$= \left\{\{x_n\} \in S^+ \mid \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^{2j-2}} \in (0,\infty)\right\},$$

$$Q_j(\infty, *) = \left\{\{x_n\} \in S^+ \mid \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^{2j-1}} = \infty, \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^{2j}} \in (0,\infty)\right\}$$

$$= \left\{\{x_n\} \in S^+ \mid \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^{2j}} \in (0,\infty)\right\},$$

$$Q_j(\infty,0) = \left\{\{x_n\} \in S^+ \mid \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^{2j-1}} = \infty, \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^{2j}} = 0\right\},$$

$$Q_j(*,0) = \left\{\{x_n\} \in S^+ \mid \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^{2j-1}} \in (0,\infty), \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^{2j}} = 0\right\}$$

$$= \left\{\{x_n\} \in S^+ \mid \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^{2j-1}} \in (0,\infty)\right\},$$

其中 j 是某特定的整数.

定理 6.9.1　如果 m 是偶数，$\{x_n\}$ 是(6.9.1)的最终正解，则有某一 $j\in\{1,2,\cdots,m/2\}$ 使得 $\{x_n\}$ 属于 $E_j(\infty,*)$，$E_j(\infty,0)$ 或 $E_j(*,0)$. 如果 m 是奇数，$\{x_n\}$ 是(6.9.1)的最终正解. 则或者有 $j\in\{1,2,\cdots,(m-1)/2\}$ 使得 $\{x_n\}$ 属于 $Q_j(\infty,*)$，$Q_j(\infty,0)$，$Q_j(*,0)$，或者 $\{x_n\}$ 收敛.

证明　设 $\{x_n\}$ 是(6.9.1)的最终正解，z_n 是它的伴随数列，由(6.9.1) 知 $\Delta^m z_n\leqslant 0$ 最终成立.

如果 m 是偶数，由引理 6.5.1 可知，有 n_1 及 $n=2j-1$，$j\in\{1,2,\cdots,m/2\}$ 使得

$$\Delta^k z_n>0,\ n\geqslant n_1,\ k=0,1,\cdots,N-1,$$

$$(-1)^{k+1}\Delta^k z_n>0,\ n\geqslant n_1,\ k=N,N+1,\cdots,m-1.$$

特别地有 $\Delta^{2j-2}z_n>0$，$\Delta^{2j-1}z_n>0$，$\Delta^{2j}z_n<0$，$n\geqslant n_1$. 因此

$$0\leqslant\lambda_{2j-1}=\lim_{n\to\infty}\Delta^{2j-1}z_n<\infty,\ 0<\lambda_{2j-2}=\lim_{n\to\infty}\Delta^{2j-2}z_n\leqslant\infty.$$

如果 $\lambda_{2j-1}>0$，则由 Stolz 定理可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{z_n}{n^{2j-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\Delta z_n}{(2j-1)n^{2j-2}}=\cdots$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\Delta^{2j-1}z_n}{(2j-1)!}=\frac{\lambda_{2j-1}}{(2j-1)!}<\infty.$$

因为 $0\leqslant x_n/n^{2j-1}\leqslant z_n/n^{2j-1}$，于是 x_n/n^{2j-1} 有界. 由引理 6.9.1 可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^{2j-2}}=\frac{\lambda_{2j-1}}{(2j-1)!(1+p)}\neq 0.$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^{2j-2}}=\infty.$$

故 $x\in E_j(\infty,*)$.

如果 $\lambda_{2j-1}=0$ 且 $\lambda_{2j-2}=\infty$ 类似有 $x\in E_j(\infty,0)$.

如果，$\lambda_{2j-1}=0, 0<\lambda_{2j-1}<\infty$，可证 $x\in E_j(*,0)$.

当 m 是奇数，则有偶数 $t\in\{0,1,\cdots,m-1\}$ 使得 $s\in\{0,1,\cdots,t\}$ 时 $\Delta^s x_n>0$，$s\in\{t+1,\cdots,m-1\}$ 时 $(-1)^{s-t}\Delta^s x_n>0$，当 $t>0$ 时，证明类似于前面的方法. 如果 $t=0$，则有 $z_n>0,\Delta z_n<0\cdots$. 因此，$\{z_n\}$ 收敛于非负常数. 由引理 6.9.1 可知 $\{x_n\}$ 收敛于非负常数. 证毕.

6.9.2 偶数阶方程的存在结果

本节中始终要求 m 是偶数.

定理 6.9.2 m 是偶数，f 是超线性的或次线性的. 如果(6.9.1)有一个属于 $E_j(\infty,*)$ 的最终正解($j\in\{1,2,\cdots,m/2\}$)，则有常数 c 使得

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{m-2j} f(n, c(n-\sigma)^{2j-1}) < \infty. \tag{6.9.2}$$

证明 设 $\{x_n\}\in E_j(\infty,*)$ 为(6.9.1)的最终正解. 则有

$$\lim_{n\to\infty} x_n/x^{2j-2}=\infty, \quad \lim_{n\to\infty} x_n/n^{2j-1}=a>0.$$

$\{z_n\}$ 是它的伴随数列最终为正，而且 $\Delta^m z_n\leqslant 0$. 则由引理 6.5.1 可知 $\Delta^i z_n$ 当 $1\leqslant i\leqslant m-1$ 时常号. 由 z_n 的定义可知 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n/n^{2j-1}=(1+p)a$. 于是由 Stolz 定理有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{z_n}{n^{2j-1}}=\cdots=\lim_{n\to\infty}\frac{\Delta^{2j-1}z_n}{(2j-1)!}=(1+p)a,$$

$$\lim_{n\to\infty}\Delta^{2j}z_n=\cdots=\lim_{n\to\infty}\Delta^{m-1}z_n=0.$$

对(6.9.1)求和，则有

$$\Delta^{2j}z_n=$$

$$(-1)^{m-2j+1}\sum_{i=n}^{\infty}\frac{(i-n+1)\cdots(i-n+m-2j-1)}{(m-2j-1)!}f(i,x_{i-\sigma}).$$

再从充分大的 n_1 开始求和上式，有

$$\Delta^{2j-1}z_{n_1}-(2j-1)!(1+p)a$$
$$=(-1)^{m-2j+1}\sum_{i=n}^{\infty}\frac{(i-n_i+1)\cdots(i-n_i+m-2j)}{(m-2j)!}.$$

于是

$$\sum_{i=0}^{\infty}i^{m-2j}f(i,x_{i-\sigma})<\infty.$$

不妨设 $n\geqslant n_1$ 时, $an^{2j-1}/2\leqslant x_n\leqslant 3an^{2j-1}/2$. 当 f 是超线性的，有 $f(n,an^{2j-1}/2)\leqslant f(n,x_n)$. 因此

$$\sum_{i=0}^{\infty}i^{m-2j}f\left(i,\frac{a}{2}(i-\sigma)^{2j-1}\right)<\infty.$$

类似地，当 f 是次线性的，我们有

$$\sum_{i=0}^{\infty}i^{m-2j}f\left(i,\frac{3a}{2}(i-\sigma)^{2j-1}\right)<\infty.$$

如果对某一 $j\in\{1,2,\cdots,m/2\}$ 及 $c>0$ 使得(6.9.2)成立，当 f 是超线性的,设 $D=c/2$，当 f 是次线性的，则令 $D=c$，记

$$\Gamma(n)=n^{2j-1},n=0,1,\cdots.$$

我们分三种情况: $p=0,0<p<1,p>1$ 来考虑. 如果 $p\in(0,1)$,则

$$\lim_{n\to\infty}p\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-\tau-\sigma)}=p,$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma(n-\tau)}{\Gamma(n)}=1>1-\frac{1-p}{4p}.$$

选择 $p_1\in(p,1),M\geqslant\tau+\sigma$ 使得

$$\frac{\Gamma(M)}{\Gamma(M-\tau-\sigma)}<2,$$

$$p\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-\tau-\sigma)}<p_1,\frac{\Gamma(n-\tau)}{\Gamma(n)}>1-\frac{1-p}{4p},n\geqslant M,\tag{6.9.3}$$

$$\sum_{i=M}^{\infty}\frac{(i-M+1)\cdots(i-M+m-2j)}{(m-2j)!}f(i,c(i-\sigma)^{2j-1})<\frac{(1-p)D}{8}.\tag{6.9.4}$$

令 $N=M-\tau-\sigma$，由(6.9.3)可知 $p\Gamma(M)/\Gamma(N)<p_1$，B 是所有实数列 $x=\{x_n\}_{n=N}^{\infty}$构成的集合，在其上定义范数

$$\|x\| = \sup_{n\geqslant N}\frac{|x_n|}{\Gamma^2(n)},$$

则 B 构成一 Banach 空间.

$$\Omega = \{x\in B \mid D\Gamma(n)\leqslant x_n\leqslant 2D\Gamma(n), n\geqslant N\}.$$

在 Ω 上定义算子 T

$$T(x)_n = D\Gamma(M), N\leqslant n<M,$$

当 $n\geqslant M$ 时

$$(Tx)_n=\frac{3D(1+p)}{2}\Gamma(n)-px_{n-\tau}$$
$$+\sum_{i_{m-1}=M}^{n-1}\sum_{i_{m-2}=M}^{i_{m-1}-1}\cdots\sum_{i_{m-2j+1}=M}^{i_{m-2j+2}-1}H_{i_{m-2j-2}}^{m-2j}(i)f(i,x_{i-\sigma}), \quad (6.9.5)$$

其中

$$H_t^s(i)u_i = \sum_{s=t}^{\infty}\frac{(i-t+1)\cdots(i-t+s)}{s!}u_i.$$

Ω 显然是有界闭凸集.我们将要证明 T 在 Ω 上是包含的，连续的和一致 Cauchy 的.

由 M 和 N 的定义及(6.9.3)和(6.9.4)，如果 $x\in\Omega$，则有

$$D\Gamma(n)< D\Gamma(M) = (Tx)_n < 2D\Gamma(n), N\leqslant n\leqslant M.$$

$$(Tx)_n\geqslant\frac{3D(1+p)}{2}\Gamma(n)-px_{n-\tau}\geqslant\frac{3D(1+p)}{2}\Gamma(n)-2pD\Gamma(n-\tau)$$
$$\geqslant\frac{3D(1+p)}{2}\Gamma(n)-2pD\Gamma(n)\geqslant D\Gamma(n), n\geqslant M,$$

$$(Tx)_n\leqslant\frac{3D(1+p)}{2}\Gamma(n)-px_{n-\tau}+\frac{(1-p)D}{8}\Gamma(n)$$
$$\leqslant\frac{3D(1+p)}{2}\Gamma(n)-Dp\left(1-\frac{1-p}{4p}\right)\Gamma(n)+\frac{(1-p)D}{8}\Gamma(n)$$

$$\leqslant \frac{15D + Dp}{8}\Gamma(n) \leqslant 2D\Gamma(n), \quad n \geqslant M.$$

即 $T\Omega \subseteq \Omega$. $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty} \subset \Omega$, 且 $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x$. 由 Ω 的闭性可知 $x \in \Omega$. 因此, $n \geqslant M$ 时有

$$\frac{|(Tx^{(k)})_n - (Tx)_n|}{\Gamma^2(n)} \leqslant p\frac{|x_{n-\tau}^{(k)} - x_{n-\tau}|}{\Gamma^2(n)}$$

$$+ \frac{1}{\Gamma^2(n)} \sum_{i_{m-1}=M}^{n-1} \sum_{i_{m-2}=M}^{i_{m-1}-1} \cdots \sum_{i_{m-2j+1}=M}^{i_{m-2j+2}-1} H_{i_{m-2j+2}}^{n-2j}(i) \left| f(i, x_{i-\sigma}^{(k)}) - f(i, x_{i-\sigma}) \right|$$

$$\leqslant p \| x^{(k)} - x \|$$

$$+ \frac{1}{\Gamma^2(n)} \frac{(n-M)^{2j-1}}{(2j-1)!} H_M^{n-2j}(i) \left| f(i, x_{i-\sigma}^{(k)}) - f(i, x_{i-\sigma}) \right|$$

$$\leqslant p \| x^{(k)} - x \|$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(n)} \frac{1}{(2j-1)!} H_M^{n-2j}(i) \left| f(i, x_{i-\sigma}^{(k)}) - f(i, x_{i-\sigma}) \right|.$$

因为

$$\left| f(i, x_{i-\sigma}^{(k)}) - f(i, x_{i-\sigma}) \right|$$

$$\leqslant f(i, x_{i-\sigma}^{(k)}) + f(i, x_{i-\sigma}) \leqslant 4f(i, c(i-\sigma)^{2j-1}),$$

且 f 关于第二变量连续. 由 Lebesgue 控制定理可知

$$\lim_{k\to\infty} \| Tx^{(k)} - Tx \| = \lim_{k\to\infty} \sup_{n \geqslant N} \frac{|(Tx^{(k)})_n - (Tx)_n|}{\Gamma^2(n)} = 0.$$

即 T 是连续的.

$x \in \Omega$, 不妨设 $t > n$, 我们有

$$\left| \frac{(Tx)_t}{\Gamma^2(t)} - \frac{(Tx)_n}{\Gamma^2(n)} \right| \leqslant \frac{3D(1+p)}{2\Gamma(t)} + \frac{3D(1+p)}{2\Gamma(n)} + p\left(\frac{x_{t-\tau}}{\Gamma^2(t)} + \frac{x_{n-\tau}}{\Gamma^2(n)} \right)$$

$$+ \frac{2}{\Gamma^2(n)} \sum_{i_{m-1}=M}^{t-1} \cdots \sum_{i_{m-2j+1}=M}^{i_{m-2j+2}-1} H_{i_{m-2j+2}}^{n-2j}(i) f(i, x_{i-\sigma})$$

$$\leqslant \frac{3D(1+p)}{\Gamma(n)} + \frac{4Dp}{\Gamma(n)} + \frac{4Dp}{\Gamma(n)} + \frac{(1-p)D}{4\Gamma(n)} \leqslant \frac{8D}{\Gamma(n)}.$$

注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}\Gamma(n)=\infty$. 于是,对 $\varepsilon>0$,总有 P 使得 $t,n\geqslant P$ 时有

$$\left|\frac{(Tx)_t}{\Gamma^2(t)} - \frac{(Tx)_n}{\Gamma^2(n)}\right| < \varepsilon.$$

即 T 在 Ω 上是一致 Cauchy 的. 于是 T 在 Ω 上有不动点 x^* 使得

$$x_n^* + px_{n-\tau}^* = \frac{3D(1+p)}{2}\Gamma(n) + \sum_{i_{m-1}=M}^{n-1}\cdots\sum_{i_{m-2j+1}=M}^{i_{m-2j+2}-1} H_{i_{m-2j+2}}^{m-2j}(i)f(i,x_{i-\sigma}^*).$$

对上式求 m 次差分可见 x^* 是(6.9.1)的解且由 Stolz 定理可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^*+px_{n-\tau}^*}{n^{2j-1}} = \frac{3D(1+p)}{2} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{2j-1}}\sum_{i_{m-1}=M}^{n-1}\cdots\sum_{i_{m-2j+1}=M}^{i_{m-2j+2}-1} H_{i_{m-2j+2}}^{m-2j}(i)f(i,x_{i-\sigma}^*)$$

$$= \frac{3D(1+p)}{2} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2j-1)!}H_n^{m-2j}(i)f(i,x_{i-\sigma}^*) = \frac{3D(1+p)}{2}.$$

最后由引理 6.9.1 可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^*}{n^{2j-1}} = \frac{3D}{2}\neq 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^*}{n^{2j-1}} = \infty.$$

也就是当 $p\in(0,1)$ 时,我们找到了(6.9.1)在 $E_j(\infty,*)$ 中的解.

当 $p=0$ 时,N,B,Ω 如前定义, M 使得

$$H_M^{m-2j}(i)f(i,c(i-\sigma)^{2j-1}) < \frac{D}{8},$$

$$(Tx) = \frac{3D}{2}\Gamma(n)$$

$$+\sum_{i_{m-1}=M}^{n-1}\sum_{i_{m-2}=M}^{i_{m-1}-1}\cdots\sum_{i_{m-2j+1}=M}^{i_{m-2j+2}-1}H_{i_{m-2j+2}}^{n-2j}(i)f(i,x_{i-\sigma}),n\geqslant M.$$

类似地可证明 $E_j(\infty,*)$有(6.9.1)的解.

当 $p>1$ 时，选择 p_1 满足 $0<\frac{1}{p}<p_1<1,M\geqslant\tau+\sigma$ 使得

$$\frac{1}{p}\frac{\Gamma^2(n+\tau)}{\Gamma^2(n-\tau-\sigma)}<p_1<1,n\geqslant M,$$

$$\frac{\Gamma(n+\tau)}{\Gamma(n)}<1+\frac{p-1}{4},n\geqslant M,$$

$$H_M^{m-2j}(i)f(i,c(i-\sigma)^{2j-1})<\frac{(p-1)D}{8}.$$

定义 T 为

$$(Tx)_n=\frac{3D(1+p)}{2p}\Gamma(n)-\frac{1}{p}\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(M)}x_{M+\tau},N\leqslant n<M,$$

$$(Tx)_n=\frac{3D(1+p)}{2p}\Gamma(n)-\frac{1}{p}x_{n+\tau}$$

$$+\frac{1}{p}\sum_{i_{m-1}=M+\tau}^{n+\tau-1}\sum_{i_{m-2}=M}^{i_{m-1}-1}\cdots\sum_{i_{m-2j+1}=M}^{i_{m-2j+2}-1}H_{i_{m-2j+2}}^{n-2j}(i)f(i,x_{i-\sigma}),n\geqslant M.$$

类似可证方程(6.9.1)有解在 $E_j(\infty,*)$. 证毕.

定理 6.9.3　m 是偶数，f 是超线性或次线性的. 如果(6.9.1)有一个解在 $E_j(*,0)$，则

$$\sum_{n=0}^{\infty}n^{m-2j+1}f(n,c(n-\sigma)^{2j-2})<\infty.\tag{6.9.6}$$

其逆命题也成立.

证明　如果(6.9.1)有一个解属于 $E_j(*,0)$. 类似定理 6.9.2 可知(6.9.6)成立. 如果(6.9.6)成立，B 和 Ω 如前定义. $\Gamma(n)=n^{2j-2}$.

当 $p\in(0,1)$，选择 $p_1\in(p,1)$，$M\geqslant\tau+\sigma$ 使得

$$p\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-\tau-\sigma)}<p_1,\frac{\Gamma(n-\tau)}{\Gamma(n)}>1-\frac{1-p}{4p},n\geqslant M,$$

$$\sum_{i=M}^{\infty}\frac{(i-M+1)\cdots(i-M+m-2j+1)}{(m-2j+1)!}f(i,c(i-\sigma)^{2j-2})$$
$$<\frac{(1-p)D}{8}.$$

定义

$$(Tx)_n = D\Gamma(M), N\leqslant n<M,$$
$$(Tx)_n = \frac{3D(1+p)}{2}\Gamma(n) - px_{n-\tau}$$
$$\sum_{i_{m-1}=M}^{n-1}\sum_{i_{m-2}=M}^{i_{m-1}-1}\cdots\sum_{i_{m-2j+2}=M}^{i_{m-2j+3}-1}H_{i_{m-2j+3}}^{m-2j+1}(i)f(i,x_{i-\sigma}), n\geqslant M.$$

当 $p=0$，选择 M 使得

$$H_M^{m-2j-1}(i)f(i,c(i-\sigma)^{2j-2})<\frac{D}{8}.$$

定义

$$(Tx)_n = D\Gamma(M), N\leqslant n<N,$$
$$(Tx)_n = \frac{3D}{2}\Gamma(n)$$
$$+\sum_{i_{m-1}=M}^{n-1}\sum_{i_{m-2}=M}^{i_{m-1}-1}\cdots\sum_{i_{m-2j+2}=M}^{i_{m-2j+3}-1}H_{i_{m-2j+3}}^{m-2j+1}(i)f(i,x_{i-\sigma}), n\geqslant M.$$

$p>1$ 时，选择 $p_1\in(1/p,1), M\geqslant\tau+\sigma$ 使得

$$\frac{1}{p}\frac{\Gamma^2(n+\tau)}{\Gamma^2(n-\tau-\sigma)}<p_1<1,\quad n\geqslant M,$$
$$\frac{\Gamma(n+\tau)}{\Gamma(n)}<1+\frac{p-1}{4},\quad n\geqslant M,$$
$$H_M^{m-2j-1}(i)f(i,c(i-\sigma)^{2j-2})<\frac{(p-1)D}{8}.$$

定义

$$(Tx)_n = \frac{3D(1+p)}{2p}\Gamma(n) - \frac{1}{p}\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(M)}x_{M+\tau}, N\leqslant n<M,$$

$$(Tx)_n = \frac{3D(1+p)}{2p}\Gamma(n) - \frac{1}{p}x_{n+\tau}$$

$$+ \frac{1}{p}\sum_{i_{m-1}=M+\tau}^{n+\tau-1}\sum_{i_{m-2}=M}^{i_{m-1}-1}\cdots\sum_{i_{m-2j+2}=M}^{i_{m-2j+3}-1}H_{i_{m-2j+3}}^{n-2j+1}(i)f(i,x_{i-\sigma}),n \geqslant M.$$

其它的证明与定理6.9.2相同，可知(6.9.1)有解在 $E_j(*,0)$中．证毕.

定理6.9.4　m是偶数，f在$(0,\infty)$上关于第二变量非增. 如果(6.9.1)在 $E_j(\infty,0)$有解，则

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{m-2j}f(n,a(n-\sigma)^{2j-2}) < \infty, \tag{6.9.7}$$

对每一正数 a 成立，且对每一正数 b 有

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{m-2j+1}f(n,b(n-\sigma)^{2j-2}) = \infty. \tag{6.9.8}$$

相反，如果(6.9.7)成立且

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{m-2j}f(n,c(n-\sigma)^{2j-2}) < \infty, \tag{6.9.9}$$

对某正数 c 成立，则(6.9.1)在 $E_j(\infty,0)$中有解.

证明　设 x 是(6.9.1)的最终正解且属于 $E_j(\infty,0)$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^{2j-2}} = \infty,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^{2j-1}} = 0.$$

于是，对任意的正数 a 和b，有 $n_1 \geqslant 0$ 使得

$$bn^{2j-2} \leqslant x_n \leqslant an^{2j-1}, n \geqslant n_1.$$

由 f 的非增性可知

$$f(n,an^{2j-1}) \leqslant f(n,x_n) \leqslant f(n,bn^{2j-2}), n \geqslant n_1.$$

这样，类似定理6.9.2的证明有(6.9.7)成立. 注意到 z_n 是x_n 的伴随数列，由 stolz 定理可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^{2j-2}} \leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{z_n}{n^{2j-2}} = \cdots = \lim_{n\to\infty}\frac{\Delta^{2j-2}z_n}{(2j-2)!} = \infty,$$

$$\lim_{n\to\infty}\Delta^{2j-1}z_n=\cdots=\lim_{n\to\infty}\Delta^{m-1}z_n=0.$$

对(6.9.1)求和，则有

$$\Delta^{2j-1}z_n$$

$$=(-1)^{m-2j}\sum_{i=n}^{\infty}\frac{(i-n+1)\cdots(i-n+m-2j)}{(m-2j)!}f(i,x_{i-\sigma}),n\geqslant n_1,$$

$$\Delta^{2j-2}z_n-\Delta^{2j-2}z_{n_1}$$

$$=(-1)^{m-2j}\sum_{i=n_1}^{n-1}\sum_{k=i}^{\infty}\frac{(k-i+1)\cdots(k-i+m-2j)}{(m-2j)!}f(k,x_{k-\sigma})$$

$$\leqslant\sum_{n=n_1}^{\infty}\frac{(n-n_1+1)\cdots(n-n_1+m-2j+1)}{(m-2j+1)}f(n,x_{n-\sigma}).$$

因 $\lim\Delta^{2j-2}z_n=\infty$，$f(n,x_n)\leqslant f(n,bn^{2j-2})$，于是有

$$\sum_{n=n_{1+\sigma}}^{\infty}n^{m-2j+1}f(n,b(n-\sigma)^{2j-2})=\infty.$$

相反，假设(6.9.8)和(6.9.9)成立. B 和 Ω 同定理 6.9.2 一样，$\Gamma(n)=n^{2j-2}$，我们仍然分三种情况：$p=0$，$0<p<1$ 和 $p>1$ 来讨论.

如果 $p\in(0,1)$，选择 $p_1\in(p,1)$，$M\geqslant\tau+\sigma$ 使得

$$\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-\tau-\sigma)}<p_1,\frac{\Gamma(n-\tau)}{\Gamma(n)}>1-\frac{1-p}{4p},n\geqslant M,$$

$$\sum_{i=m}^{\infty}\frac{(i-M+1)\cdots(i-M+m-2j)}{(m-2j)!}f(i,c(i-\sigma)^{2j-2})<\frac{(1-p)D}{8}.$$

定义

$$(Tx)_n=D\Gamma(M),\quad N\leqslant n<M,$$

$$(Tx)_n=\frac{3D(1+p)}{2}\Gamma(n)-px_{n-\tau}$$

$$+\sum_{i_{m-1}=M}^{n-1}\sum_{i_{m-2}=M}^{i_{m-1}-1}\cdots\sum_{i_{m-2j+3}=M}^{i_{m-2j+4}-1}H_{i_{m-2j+4}}^{m-2j}(i)f(i,x_{i-\sigma}),n\geqslant M.$$

类似于定理 6.9.2 的证明可知 T 在 Ω 有不动点 x^* 且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^*+px_{n-\tau}^*}{n^{2j-2}}$$

$$=\frac{3(1+p)D}{2}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2j-2)!}\sum_{k=M}^{n-1}H_k^{m-2j}(i)f(i,x_{i-\sigma}^*),$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^*+px_{n-\tau}^*}{n^{2j-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2j-1)!}H_n^{m-2j}f(i,x_{i-\sigma}^*)=0.$$

由引理 6.9.1 知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^*}{n^{2j-1}}=0.\tag{6.9.10}$$

设 z_n^* 是 x_n^* 的伴随数列且满足 $\Delta^{2j-2}z_n^*>0,\Delta^{2j-1}z^*<0$. 即知 $\{\Delta^{2j-2}z_n^*\}$ 是单增正数列. 于是它或者发散或者收敛于正数. 如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{z_n^*}{n^{2j-2}}=0,$$

由引理 6.9.1 可知 $x\in E_j(*,0)$. 故有(6.9.6)成立, 这矛盾于(6.9.8). 从而知 $x^*\in E_j(\infty,0)$, 证毕.

6.9.3 奇数阶方程的存在结果

对于 m 是奇数的情况, 我们将得到四个结果. 前面的三个分别类似定理 6.9.2, 6.9.3 和 6.9.4, 它们的证明方法也类似.

定理 6.9.5 m 是奇数, f 是超线性或次线性的, 如果(6.9.1)有一个解属于 $O_j(\infty,*)$ 对某一 $j\in\{1,2,\cdots,(m-1)/2\}$. 则有常数 $c>0$ 使得

$$\sum_{n=0}^{\infty}n^{m-2j-1}f(n,c(n-\sigma)^{2j})<\infty.\tag{6.9.11}$$

其逆命题也成立.

证明类似于定理 6.9.2. B 和 Ω 同定理 6.9.2 一样, $\Gamma(n)=n^{2j}$, 当 $p\in[0,1)$ 时, 定义

$$(Tx)_n=D\Gamma(M),N\leqslant n<M,$$

$$(Tx)_n = \frac{3D(1+p)}{2}\Gamma(n) - px_{n-\tau}$$

$$+ \sum_{i_{m-1}=M}^{n-1} \sum_{i_{m-2}=M}^{i_{m-1}-1} \cdots \sum_{i_{m-2j}=M}^{i_{m-2j-1}-1} H_{i_{m-2j+1}}^{n-2j-1}(i) f(i, x_{i-\sigma}), n \geqslant M;$$

当 $p>1$ 时,定义

$$(Tx)_n = \frac{3D(1+p)}{2p}\Gamma(n) - \frac{1}{p}\frac{\Gamma(n)}{p(M)}x_{M+\tau}, N \leqslant n < M,$$

$$(Tx)_n = \frac{3D(1+p)}{2p}\Gamma(n) - \frac{1}{p}x_{n+\tau}$$

$$+ \frac{1}{p}\sum_{i_{m-1}=M+\tau}^{n+\tau-1} \sum_{i_{m-2}=M}^{i_{m-1}-1} \cdots \sum_{i_{m-2j}=M}^{i_{m-2j}-1} H_{i_{m-2j+1}}^{n-2j-1}(i) f(i, x_{i-\sigma}), n \geqslant M.$$

定理6.9.6　m 是奇数 f 是超线性或次线性的. 如果(6.9.1)有解属于 $O_j(*,0)$,则

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{m-2j} f(n, c(n-\sigma)^{2j-1}) < \infty. \qquad (6.9.12)$$

其逆命题也成立.

定理 6.9.7　m 是奇数, f 在 $(0,\infty)$ 关于第二变量非增, 如果(6.9.1)有一个解属于 $O_j(*,0)$,则对于正数 a,b 有

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{m-2j-1} f(n, a(n-\sigma)^{2j}) < \infty. \qquad (6.9.13)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{m-2j} f(n, b(n-\sigma)^{2j-1}) = \infty. \qquad (6.9.14)$$

相反,如果(6.9.14)和(6.9.12)成立,则(6.9.1)有解属于 $O_j(\infty,0)$.

定理 6.9.8　m 是奇数, f 是超线性或次线性的. 如果(6.9.1)有一个最终正解收敛于某正数 a, 则有 $c>0$ 使得

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{m-1} f(n,c) < \infty.$$

其逆命题也成立.

B,Ω 的选取同定理 6.9.2. 一样. $\Gamma(n)=1$. 当 $p\in[0,1)$时,定义

$$(Tx)_n = D\Gamma(M), \qquad N\leqslant n < M,$$

$$(Tx)_n = \frac{3D(1+p)}{2} - px_{n-\tau} + H_n^{n-1}(i)f(i,x_{i-\sigma}), n\geqslant M;$$

当 $p>1$ 时,定义

$$(Tx)_n = \frac{3D(1+p)}{2p} - \frac{1}{p}x_{M+\tau}, N\leqslant n < M,$$

$$(Tx)_n = \frac{3D(1+p)}{2p} - \frac{1}{p}x_{n+\tau} + \frac{1}{p}H_{n+\tau}^{n-1}(i)f(i,x_{i-\sigma}), n\geqslant M.$$

其余的证明类似于定理 6.9.2.

§6.10 注记

§6.1 的内容是 Cheng 在 1984 年在[11]中给出. §6.2 则选自[111－115]的部分内容，但有些结果不完全一样. §6.3 中的定理请看 Zhang 和 Cheng 的[116]. §6.4 的内容则见 Liu 和 Cheng 的[121]，有关这方面的工作也可看[120]和[122]. §6.5 的内容请参阅 Wong 和 Agorwal. 的结果. §6.7 见[124],[125]和[126]，而 §6.8 中的结果是[124]的部分内容. §6.9 是由 Li，Cheng 和 Zhang 在[127]中得到.

第七章　偏差分方程最终正解的存在性与不存在性

本章中，由于篇幅的关系，我们并不打算给出一般偏差分方程的概念及其分类，而只就要接触到的问题给出粗浅的解释．有关这方面的详细论述，读者可参阅 Cheng 的专著[128]．

§7.1　热方程的行波正解

由 Newton 冷却定律，可以导出离散热传导方程

$$u_n^{(t+1)} - u_m^{(t)} = r(u_{n-1}^{(t)} - u_n^{(t)}) + r(u_{n+1}^{(t)} - u_n^{(t)}), \quad (7.1.1)$$

其中 $r>0$ 为冷却常数，$n\in\mathbf{Z}$ 是空间变量，t 是非负整数为时间变量．

方程(7.1.1)可以写成一般的形式

$$u_n^{(t+1)} = au_{n+1}^{(t)} + bu_n^{(t)} + cu_{n-1}^{(t)}, n \in \mathbf{Z}, t \in \mathbf{N}, \quad (7.1.2)$$

其中 $a,b,c\in\mathbf{R}$．

对于方程(7.1.2)，如果给定初值分布 $\{\varphi_n^{(0)}\}_{n=-\infty}^{\infty}$，则用(7.1.2)逐层计算可得 $\{u_n^{(1)}\}$，$\{u_n^{(2)}\}$，…，因此，(7.1.2) 解的存在性与唯一性是显然的．

方程(7.1.2)形如

$$u_n^{(t)} = \varphi(n - \rho t), n \in \mathbf{Z}, t > 0, \rho \in \mathbf{Z}, \quad (7.1.3)$$

的解称为 (7.1.2) 的行波解，其中 ρ 称为行波的速度．本节中就是寻找 (7.1.2) 的行波正解的存在条件，给出了如此解存在的充要条件．

将 (7.1.3)代入(7.1.2)，我们有

$$\begin{aligned}&\varphi(n-\rho t-\rho)\\&=a\varphi(n-\rho t-1)+b\varphi(n-\rho t)+c\varphi(n-\rho t+1).\end{aligned}$$

令:$k=n-\rho t$,则有

$$\varphi(k-\rho)=a\varphi(k-1)+b\varphi(k)+c\varphi(k+1),k\in Z.$$

由定理 2.1.1 可知,如上方程有正解的充要条件是特征方程

$$c\lambda^{\rho+1}+b\lambda^{\rho}+a\lambda^{\rho-1}-1=0$$

有正根 λ. 因此,方程 (7.1.2) 有正的行波解当且仅当有

$$u_n^{(t)}=\lambda^{n-\rho t},\rho\in\mathbf{Z},n\in\mathbf{Z},t\geqslant0,\lambda>0. \qquad (7.1.4)$$

也就是寻找如上特征方程有正根的条件.

当 $\rho\geqslant2$ 时,特征方程可变为

$$h(\lambda)=c\lambda^{\rho+1}+b\lambda^{\rho}+a\lambda^{\rho-1}-1=0. \qquad (7.1.5)$$

定理7.1.1 $\rho\geqslant2$,则 (7.1.5) 有正根的充要条件是如下条件之一成立:(1)$c>0$;(2)$c=0,b>0$;(3)$c=0,b=0,a>0$;(4)$c=0,b<0$,

$$a\geqslant\left[\frac{\rho^{\rho}}{(\rho-1)^{\rho-1}}\right]^{\frac{1}{\rho}}(-b)^{\frac{\rho-1}{\rho}}; \qquad (7.1.6)$$

(5)$c<0,a>0,\Psi(a,b,c,\rho)\geqslant1$; (6)$c<0.a\leqslant0,b^2\rho^2\geqslant4ac(\rho^2-1),\Psi(a,b,c,\rho)\geqslant1$,其中

$$\Psi(a,b,c,\rho)=\frac{1}{\rho+1}\left(-\frac{1}{2c(\rho+1)}\left[b\rho+\sqrt{b^2\rho^2-4ac\rho^2+4ac}\right]\right)^{\rho-1}$$
$$\times\left(-\frac{1}{2}\times\frac{b}{c(\rho+1)}\left[b\rho+\sqrt{b^2\rho^2-4ac\rho^2+4ac}\right]+2a\right).$$

证明 首先,$h(0)=-1$,考虑 $c>0,c=0$ 和 $c<0$ 三种情况. 如果 $c>0$,因 $\lim\limits_{\lambda\to\infty}h(\lambda)=\infty$,显然 $h(\lambda)$有正根. 如果 $c=0$,则

$$h(\lambda)=b\lambda^{\rho}+a\lambda^{\rho-1}-1.$$

这时需考虑 $b>0,b=0$ 和 $b<0$. $b>0$ 时 $h(\lambda)$显然有正根. 如果 $b=0,h(\lambda)=a\lambda^{\rho-1}-1$. 这时 $h(\lambda)$有正根当且仅当 $a>0$. $b<0$ 时,注意到 $h(0)=-1,\lim\limits_{\lambda\to\infty}h(\lambda)=-\infty$,

$$h'(\lambda) = b\rho\lambda^{\rho-2}\left(\lambda + \frac{\rho-1}{\rho}\cdot\frac{a}{b}\right),$$

这时，$h'(\lambda)$仅有根 $\lambda_1=0$ 和 $\lambda_2=-\frac{\rho-1}{\rho}\cdot\frac{a}{b}$. 如果 $a\leqslant 0, \lambda_1, \lambda_2\leqslant 0$, 可知 $h'(\lambda)\leqslant 0$, $h(\lambda)$不可能有正根. 如果 $a>0$, 则 $\lambda_2>0$, 这时 $\lambda\in(0,\lambda_2)$, $h'(\lambda)>0$, $\lambda\in(\lambda_2,+\infty)$时 $h'(\lambda)<0$, $h(\lambda)$有最大值

$$h(\lambda_2) = a^{\rho}\left(-\frac{\rho-1}{b}\right)^{\rho-1}\cdot\frac{1}{\rho^{\rho}} - 1,$$

因此，$c=0, b<0$ 时，$h(\lambda)$有正根当且仅当 $h(\lambda_2)\geqslant 0$. 这正是(7.1.6)式.

如果 $c<0$, 这时 $\lim\limits_{\lambda\to\infty}h(\lambda)=-\infty$.

$$h'(\lambda) = c(\rho+1)\lambda^{\rho-2}(\lambda^2 + \frac{b}{c}\cdot\frac{\rho}{\rho+1}\lambda + \frac{a}{c}\cdot\frac{\rho-1}{\rho+1}).$$

$h'(\lambda)$有根

$$\mu_1 = \frac{-1}{2c(\rho+1)}\left[b\rho - \sqrt{b_2\rho^2 - 4ac(\rho^2-1)}\right],$$

$$\mu_2 = \frac{-1}{2c(\rho+1)}\left[b\rho + \sqrt{b_2\rho^2 - 4ac(\rho^2-1)}\right],$$

且当 $\rho\neq 2$, 还有根 μ_3.

现在分 $a>0$ 和 $a\leqslant 0$ 两种情况. 如果 $a>0$, 则有 $\mu^3\leqslant\mu_3=0<\mu_2$, 且 $\lambda\in(0,\mu_2)$时 $h'(\lambda)>0$, $\lambda\in(\mu_2,\infty)$时 $h'(\lambda)<0$, 这时 $h(\lambda)$有最大值

$$h(\mu_2) = \frac{1}{\rho+1}\mu_2^{\rho-1}(b\mu_2 + 2a) - 1. \tag{7.1.7}$$

这时，$h(\lambda)$有正根当且仅当 $h(\mu_2)\geqslant 0$. 即：$\Psi(a,b,c,\rho)\geqslant 1$. 如果 $a\leqslant 0$, 注意到 $b^2\rho^2<4(\rho^2-1)ac$ 时，μ_1 和 μ_2 是复根. 因此，要求 $b^2\rho^2\geqslant 4(\rho^2-1)ac$. 这时有 $0<\mu_1<\mu_2$ 且 $\lambda\in(0,\mu_1)$时 $h'(\lambda)<0$, $\lambda\in(\mu_1,\mu_2)$时，$h'(\lambda)>0$, $\lambda\in(\mu_2,\infty)$时，$h'(\lambda)<0$. 因此，在$(0,\infty)$上 $h(\lambda)$有极值 $h(\lambda_2)$被 (7.1.7) 定义. 于是 (7.1.5) 有正根当且仅当

$h(\mu_2)\geqslant 0$. 证毕.

当 $\rho\leqslant -2$ 时,特征方程可以写成

$$H(\lambda) = \lambda^{-\rho+1} - c\lambda^2 - b\lambda - a = 0. \tag{7.1.8}$$

它同 $h(\lambda)$具有对称性. 因此,类似定理 7.1.1,我们有如下结果.

定理 7.1.2 如果 $\rho\leqslant -2$,则 (7.1.8) 有正根的充要条件是如下条件之一成立:(i) $a>0$; (ii) $a=0, b>0$; (iii) $a=0, b=0, c>0$; (iv) $a=0, b<0, c\geqslant -\rho\left(\frac{-b}{\rho+1}\right)^{\frac{\rho+1}{\rho}}$; (v) $a<0, c\geqslant 0, \varphi(a,b,c,\rho)\geqslant 1$; (vi) $a<0, c<0, b^2\rho^2\geqslant 4ac(\rho^2-1), \varphi(a,b,c,\rho)\geqslant 1$,

其中

$$\varphi(a,b,c,\rho) = \left[\frac{2a(\rho-1)}{\sqrt{b_2\rho^2-4ac(\rho^2-1)}-b\rho}\right]^{\rho}\frac{\sqrt{b_2\rho^2-4ac(\rho^2-1)}-b}{\rho^2-1}.$$

定理 7.1.2 的证明类似定理 7.1.1. 省略.

当 $\rho=1$ 时,特征方程可写为

$$c\lambda^2 + b\lambda + a - 1 = 0; \tag{7.1.9}$$

当 $\rho=0$ 时,可写为

$$c\lambda^2 + (b-1)\lambda + a = 0; \tag{7.1.10}$$

而当 $\rho=-1$ 时为

$$(c-1)\lambda^2 + b\lambda + a = 0. \tag{7.1.11}$$

这些方程是二次方程,因此直接有如下结果.

定理 7.1.3 $\rho=1$, 方程 (7.1.9) 有正根的充要条件是如下条件之一成立:

(i) $c=0, b(a-c)<0$;

(ii) $c>0, b>0, a<1$;

(iii) $c>0, b\leqslant 0, b^2\geqslant 4c(a-1)$;

(iv) $c<0, b<0, a>1$;

(v) $c<0, b\geqslant 0, b^2\geqslant 4c(a-1)$.

定理 7.1.4 方程 (7.1.10) 有正根当且仅当下列条件之一成立:

(i) $c=0, a(b-1)<0$;

(ii) $c>0, b\geqslant 1, a<0$;

(iii) $c>0, b<1, a\leqslant (b-1)^2/4c$;

(iv) $c<0, b\leqslant 1, a>0$;

(v) $c<0, b>1, a\geqslant (b-1)^2/4c$.

定理 7.1.5 方程 (7.1.11) 有正根当且仅当下列条件之一成立:

(i) $c=1, ab<0$,

(ii) $c>1, b\geqslant 0, a<0$;

(iii) $c>1, b<1, a\leqslant b^2/(4c-1)$;

(iv) $c<1, b\leqslant 0, a>0$;

(v) $c<1, b>0, a\geqslant b^2/(4c-4)$.

§ 7.2 热方程有界正解的存在性

对于热方程 (7.1.1)如果加时滞项,则可变为更一般的方程

$$u_n^{(t+1)} - u_n^{(t)} = \alpha u_{n-1}^{(t)} + \beta u_n^{(t)} + \gamma u_{n+1}^{(t)} + q u_n^{t-\sigma}, \quad (7.2.1)$$

其中 $n\in \mathbf{Z}, t\in \mathbf{N}, \sigma$ 是非负整数.

给定初始条件 $u_n^{(t)}, -\sigma\leqslant t\leqslant 0, n\in\mathbf{Z}$,同样可逐层求出双标序列$\{u_n^{(t)}\}$,该双标序列 $u=\{u_n^{(t)} | n\in\mathbf{Z}, t=-\sigma,-\sigma+1,\ldots\}$,称为(7.2.1)的一个解.这样的解如果有某一非负整数 T 使得 $t\geqslant T$ 时对 $n\in\mathbf{Z}$ 有 $u_n^{(t)}>0$,称 u 是 (7.2.1)的一个最终正解.一个解的第 t 层事实上是无限序列 $\{\ldots, u_{-1}^{(t)}, u_0^{(t)}, u_1^{(t)},\ldots\}$,把它用列向量 $u^{(t)}$ 记,这样, (7.2.1) 的解可看成向量序列$\{u_n^{(t)}\}_{t=-\sigma}^{\infty}$.这样的解满足时滞向量方程

$$u^{(t+1)} - u^{(t)} = Au^{(t)} + qu^{(t-\sigma)}, t \in N, \qquad (7.2.2)$$

其中 A 是一个三对角无限矩阵，它满足 $a_{i,i} = \beta, a_{i,i-1} = \alpha$ 和 $a_{i,i+1} = \gamma, i \in \mathbf{Z}$，其它项都是零.

一个向量 $v \in l^Z$ 如果其所有分量为正，我们称其为正向量，记为 $v > 0$. 因此，(7.2.1)的一个最终正解是指 $\{v^{(t)}\}$ 最终为正. (7.2.1)有一个最终正解当且仅当(7.2.2)有最终正解.

如果 λ 是 A 的特征值，而 v 是其对应的特征向量，这时有

$$Av = \lambda v. \qquad (7.2.3)$$

设 $\{x_i\}_{t=-\sigma}^{\infty}$ 是标量差分方程

$$x_{t+1} - x_t = \lambda x_t + qx_{t-\sigma}, t \in \mathbf{N} \qquad (7.2.4)$$

的一个解，这时显然有

$$\begin{aligned} x_{t+1}v - x_t v &= \lambda x_t v + qx_{t-\sigma}v \\ &= x_t Av + qx_{t-\sigma}v, t \in \mathbf{N}, \end{aligned}$$

即 $\{x_n v\}$ 是(7.2.1)的一个解.

定理 7.2.1 矩阵 A 有特征值 λ，v 是其对应的特征向量且(7.2.4)有解 $\{x_t\}$，则(7.2.2)有解 $\{x_t v\}$.

由此可见，为了寻找 (7.2.2)一个最终正的有界解，只要寻找 λ 和 Z 的有界向量使得其满足(7.2.3)及(7.2.4)的一个最终有界正解. $\lambda = \alpha + \beta + \gamma$ 和 $v = \{1\}$ 显然满足(7.2.3). 接下来考虑方程

$$x_{t+1} - x_t = (\alpha + \beta + \gamma)x_t + qx_{t-\sigma}, t \in \mathbf{Z}. \qquad (7.2.5)$$

令；$x_t = s^t, 0 < s \leqslant 1$，为 (7.2.5) 满足要求的解. 则有，

$$s^{\sigma+1} - (1 + \alpha + \beta + \gamma)s^\sigma - q = 0.$$

这只要寻找如上方程在(0,1]的根即可. 一般地，考虑方程

$$h(t) = s^{\sigma+1} + as^\sigma + b, s \in R. \qquad (7.2.6)$$

当 $\sigma = 0$ 时，(7.2.6)有唯一根 $s = -a-b$. 这时 (7.2.6) 在(0,1]有根当且仅当 $-1 \leqslant a + b < 0$. 如果 $\sigma > 0$，注意到，$h(0) = b$，$\lim_{s\to\infty} h(s) = \infty$. 从而知 $b < 0$ 时 (7.2.6) 有正根. 这时(7.2.6) 在(0,1]有正根当

且仅当 $h(1)=1+a+b\geqslant 0$. 如果 $b=0$,(7.2.6)有根 0 和 $-a$,这时(7.2.6) 在$(0,1]$有根当且仅当 $-1\leqslant a<0$. 如果 $b>0, a\geqslant 0$,(7.2.6)无正根. 当 $b>0, a<0$ 时,$h(s)$有极小值点 $s^*=-a\sigma/(\sigma+1)$,

$$h(s^*)=b-\frac{(-a)^{\sigma+1}\sigma^\sigma}{(\sigma+1)^{\rho+1}}.$$

这时 $h(s)$在$(0,1]$有根当且仅当

$$b\leqslant\frac{(-a)^{\sigma+1}\sigma_\sigma}{(\sigma+1)^{\sigma+1}}$$

且

$$0<t^*=\frac{-a\sigma}{\sigma+1}\leqslant 1.$$

于是有如下结果:

定理 7.2.2 当 $\sigma=0$, $-1<\alpha+\beta+\gamma+q\leqslant 0$,则 (7.2.1)有有界正解. 如果 $\sigma>0$,或者 $0<\alpha+\beta+\gamma\leqslant\frac{1}{\sigma}$ 且 $-\frac{(1+\alpha+\beta+\gamma)^{\sigma+1}\sigma^\sigma}{(\sigma+1)^{\sigma+1}}\leqslant q<0$;或者 $-1<\alpha+\beta+\gamma\leqslant 0$ 且 $-\frac{(1+\alpha+\beta+\gamma)^{\sigma+1}\sigma^\sigma}{(\sigma+1)^{\sigma+1}}\leqslant q\leqslant-(\alpha+\beta+\gamma)$;或者 $\alpha+\beta+\gamma\leqslant-1$ 且 $0<q\leqslant-(\alpha+\beta+\gamma)$,则(7.2.1)存在有界最终正解.

§7.3 象限偏差分方程最终正解的存在性

前面我们已经讨论过时滞差分方程

$$x_{n+1}-x_n+p(n)x_{n-\tau}=0, n\in N.$$

它的一个自然扩充则是方程

$$x_{m+1,n}+x_{m,n+1}-x_{mn}+p(m,n)x_{m-\sigma,n-\tau}=0, m,n\in N. \tag{7.3.1}$$

本节中将考虑方程(7.3.1)最终正解的存在性. 为此,我们也需考虑对应的差分不等式

$$x_{m+1,n}+x_{m,n+1}-x_{mn}+p(m,n)x_{m-\sigma,n-\tau}\leqslant 0, m,n\in N. \tag{7.3.2}$$

设 σ 和 τ 是非负整数，$\{p(m,n)\}$ 是双标序列.(7.3.2)的一个解是指双标序列 $x=\{x_{mn}|m\geqslant\sigma,n\geqslant\tau\}$ 满足(7.3.2). 如此的解如果有 M 和 N 使得 $m\geqslant M,n\geqslant N$ 时有 $x_{mn}\geqslant 0$，则称 $\{x_{mn}\}$ 是(7.3.2)的最终正解. 方程(7.3.1)的一个最终正解显然也是(7.3.2)的一个最终正解. 相反，设 $\{x_{mn}\}$ 是 (7.2.3)的最终正解，且设 $m\geqslant M-\sigma,n\geqslant N-\tau$ 时 $x_{mn}>0$. 由(7.3.2)自然有

$$x_{m+1,n}+x_{m,n+1}-x_{mn}\leqslant 0, m\geqslant M, n\geqslant N.$$

从而可知 $\Delta_1 x_{mn}=x_{m+1,n}-x_{mn}$ 和 $\Delta_2 x_{mn}=x_{m,n+1}-x_{mn}$ 对所有的大 m 和大 n 非正. (7.3.2)等价于

$$\Delta_2\Delta_1 x_{mn}\geqslant x_{m+1,n+1}+p(m,n)x_{m-\sigma,n-\tau}, m,n\in N. \tag{7.3.3}$$

从 (m,n) 到 ∞ 对 (7.3.3) 求和，则有

$$\sum_{(i,j)=(m,n)}^{\infty}\Delta_2\Delta_1 x_{ij}\geqslant\sum_{(i,j)=(m,n)}^{\infty}x_{i+1,j+1}+\sum_{(i,j)=(m,n)}^{\infty}p(i,j)x_{i-\sigma,j-\tau}.$$

因为

$$\begin{aligned}\sum_{(i,j)=(m,n)}^{(\bar m,\bar n)}\Delta_2\Delta_1 x_{i,j}&=\sum_{i=m}^{\bar m}\Delta_1 x_{i,\bar n+1}-\sum_{i=m}^{\bar m}\Delta_1 x_{in}\\&\leqslant-\sum_{i=1}^{\bar m}\Delta_1 x_{in}=-x_{\bar m+1,n}+x_{mn}\leqslant x_{mn}.\end{aligned}$$

因此有

$$x_{mn}\geqslant\sum_{(i,j)=(m,n)}^{\infty}x_{i+1,j+1}+\sum_{(i,j)=(m,n)}^{\infty}p(i,j)x_{i-\sigma,j-\tau}, \tag{7.3.4}$$

$m\geqslant M,n\geqslant N$. 设 Ω 是所有实数列

$$\{y_{mn}|m\geqslant M-\sigma,n\geqslant N-\tau\}$$

组成的集合，在其上定义算子 T 如下：

$$(Ty)_{mn}=\sum_{(i,j)=(m,n)}^{\infty}y_{i+1,j+1}+\sum_{(i,j)=(m,n)}^{\infty}p(i,j)y_{i-\sigma,j-\tau},$$

$m \geqslant M, n \geqslant N$, 此外, $(Ty)_{mn} = x_{MN}$. 我们按如下方式定义序列 $\{y^{(t)}\}$:

$$y_{mn}^{(0)} = \begin{cases} x_{mn}, m \geqslant M, n \geqslant N, \\ x_{MN}, \text{其它}, \end{cases}$$

且

$$y^{(t+1)} = Ty^{(t)}, t \in N.$$

由(7.3.4)显知

$$0 \leqslant y_{mn}^{(t+1)} \leqslant y_{mn}^{(t)} \leqslant y_{mn}^{(0)}, m \geqslant M, n \geqslant N, t \geqslant 1.$$

于是有 w 使得 $y^{(t)} \to w$, 它满足

$$w_{mn} = \sum_{(i,j)=(m,n)}^{\infty} w_{i+1,j+1} + \sum_{(i,j)=(m,n)}^{\infty} p(i,j) w_{i-\sigma,j-\tau}, \quad (7.3.5)$$

$n \geqslant M, n \geqslant N$. 此外 $w_{mn} = x_{MN}$. 两边求偏差分可知 w 是(7.3.1)的一个非负解. 如果 $\min(\sigma,\tau) > 0, p(m,n) > 0$, 显然由(7.3.5)知 w 是正的.

定理 7.3.1 $\{p(m,n)\}$是正的双标数列, σ 和 τ 非负且 $\min(\sigma,\tau) > 0$, 则 (7.2.1)有最终正解的充要条件是 (7.3.2)有最终正解.

如果 $p(m,n) \equiv p \geqslant 0$, 则 (7.3.2) 变为

$$x_{m+1,n} + x_{m,n+1} - x_{mn} + p x_{m-\sigma,n-\tau} \leqslant 0. \quad (7.3.6)$$

令

$$y_{mn} = \left(\frac{1-\lambda}{2}\right)^{m+n}, m \geqslant -\sigma, n \geqslant -\tau,$$

λ 是一个待定常数, 如果要 y 为正, 显然 $\lambda < 1$,

$$\begin{aligned} y_{m+1,n} + y_{m,n+1} - y_{mn} &= -\lambda\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)^{m+n} \\ &= -\lambda\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)^{\sigma+\tau}\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)^{m+n-\sigma-\tau} \\ &= -\lambda\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)^{\sigma-\tau} y_{m-\sigma,n-\tau}. \end{aligned}$$

如果

$$\lambda\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)^{\sigma+\tau} \geqslant p,$$

则 y 是 (7.3.6) 的一个正解. 而

$$\max_{0\leqslant\lambda\leqslant1} \lambda(1-\lambda)^{\sigma+\tau} = \frac{(\sigma+\tau)^{\sigma+\tau}}{(\sigma+\tau+1)^{\sigma+\tau+1}}.$$

因此

$$p \leqslant \frac{1}{2^{\sigma+\tau}} \cdot \frac{(\sigma+\tau)^{\sigma+\tau}}{(\sigma+\tau+1)^{\sigma+\tau+1}}.$$

可求得 $\lambda\in[0,1)$.

注意到定理 7.3.1 的证明,我们会有如下比较定理:

定理 7.3.2 如果

$$0 < p(m,n) \leqslant P(m,n), 0 \leqslant \sigma \leqslant \sigma', 0 \leqslant \tau \leqslant \tau',$$

且 $\min(\sigma,\tau)>0$,

$$y_{m+1,n} + y_{m,n+1} - y_{mn} + P(m,n)y_{m-\sigma',n-\tau'} \leqslant 0,$$

存在最终正解,则 (7.3.2) 有最终正解.

由定理 7.3.2 及前面的讨论可知.

推论 7.3.1 定理 7.3.1 的条件成立且

$$p(m,n) \leqslant \frac{1}{2^{\sigma+\tau}} \cdot \frac{(\sigma+\tau)^{(\sigma+\tau)}}{(\sigma+\tau+1)^{\sigma+\tau+1}}, m,n \in N,$$

则 (7.3.2) 有最终正解.

§7.4 常系数偏差分方程的振动性

本节中将考虑两个常系数偏差分方程

$$u_{i+1,j} + bu_{i,j+1} + cu_{ij} = 0, i,j \in N \tag{7.4.1}$$

和

$$u_{i+1,j+1} + au_{i+1,j} + bu_{i,j+1} + cu_{ij} = 0, i,j \in N, \tag{7.4.2}$$

的振动性.

7.4.1 三点两系数方程

方程 (7.4.1) 是一个三点两系数方程,其中 b 和 c 是实数.显然,在 (7.4.1) 中我们将要求 $b\neq0$;否则,(7.4.1)将变为常差分方程.因为方程 (7.4.1) 可以写成

$$u_{i+1,j}=-bu_{i,j+1}-cu_{ij},i,j\in N.$$

因此,给定初始条件 $u_{0j},j\in\mathbf{N}$,可以唯一确定(7.4.1)的一个解.而在(7.4.1) 中要求 $b\neq0$,类似地给定初始条件 $v_{i0},i\in\mathbf{N}$,同样可逐项计算出(7.4.1)的唯一解.

三点两系数方程也是象限方程.如果(7.4.1)的一个非退化解既不是最终正解也不是最终负解,称其为振动解.

引理 7.4.1 如果 $b\neq0$,则以 z 和 w 为变量的代数方程

$$z+bw+c=0 \tag{7.4.3}$$

无正解对的充要条件是 $b>0,c\geqslant0$.

证明 $b>0,c\geqslant0$ 时,(7.4.3)显然无正解对.因为对任何的正数 z 和 w 有 $z+bw+c>0$.相反,如果 $b<0,c\geqslant0$,则(7.4.3)有解 $z=1,w=-c(c+1)/b$; 如果 $b<0,c<0$ 有解对 $z=-(b+c)$ 和 $w=1$;而 $b>0,c<0$ 时有解对 $z=-c/2$ 和 $w=-c/(2b)$.证毕.

定理 7.4.1 如果 $b\neq0$,则 (7.4.1) 振动的充要条件是 $b>0$, $c\geqslant0$.

证明 如果 $b<0$ 或 $c<0$,由引理 7.4.1 可知方程 (7.4.3)有正根 z_0 和 w_0.而 $u_{ij}=z_0^iw_0^j$ 就是(7.4.1) 的一个最终正解.相反,如果 $b>0,c\geqslant0$ 时方程 (7.4.1)有最终正解 $\{u_{ij}\}$.不失一般性,可设 $i,j\geqslant0$ 时,$u_{ij}>0$,从而 (7.4.1)的左边最终为正,这是一个矛盾.证毕.

7.4.2 四点三系数方程

方程 (7.4.2) 我们称其为四点三系数方程.它可以写成

$$u_{i+1,j+1} = -au_{i+1,j} - bu_{i,j+1} - cu_{ij}, i,j \in N$$

因此,给定条件

$$u_{0j} = \varphi_j, j \in N,$$
$$u_{i0} = \Psi_i, i \in N,$$

及相容条件 $\varphi_0 = \Psi_0$,可以唯一确定 (7.4.2) 的解. 注意到 $a = c = 0$ 或者 $b = c = 0$ 时,(7.4.2) 变成一常差分方程. 因此,将假设 $|a| + |c| > 0, |b| + |c| > 0$.

引理 7.4.2 如果 $|a| + |c| > 0, |b| + |c| > 0$,则方程

$$zw + az + bw + c = 0 \tag{7.4.4}$$

无正根的充要条件是 $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$.

证明 如果 $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$,注意到 $|a| + |c| > 0$ 和 $|b| + |c| > 0$ 可知 a, b, c 三个数中至少有一个不为零. 这时对任意的正数对 z 和 w 均会使 (7.4.4) 的左边恒正. 相反,我们分如下情况讨论:

(1) $a > 0, b \geq 0, c < 0$,(7.4.4)有正根

$z = -c/(2a), w = -ac/(2ab - c)$;

(2) $a > 0, b < 0, c < 0$,(7.4.4)有根

$z = -b/2 - c/(2a), w = a$;

(3) $a > 0, b < 0, c \geq 0$,(7.4.4)有根

$z = -b/2, w = a - 2c/b$;

(4) $a = 0, b \geq 0, c < 0$,(7.4.4)有根

$z = b + 1, w = -c/(2b + 1)$;

(5) $a = 0, b < 0, c > 0$,(7.4.4)有根

$z = -b/2, w = -2c/b$;

(6) $a = 0, b < 0, c < 0$,(7.4.4)有根

$z = -2b, w = c/b$;

(7) $a < 0, b > 0, c < 0$,(7.4.4)有根,

$z = b, w = -a/2 - c/(2b)$;

(8) $a<0,b>0,c\geqslant 0$,(7.4.4)有根

$z=-a/c+(ab-c)/a, w=-a/2$;

(9) $a<0,b=0,c<0$,(7.4.4)有根

$z=-c, w=-a+1$;

(10) $a<0,b=0,c>0$,(7.4.4)有根

$z=-2c/a, w=-a/2$;

(11) $a<0,b<0,c>ab$,(7.4.4)有根

$z=-b/2, w=-c/b+(ac-a)/b$;

(12) $a<0,b<0,c\leqslant ab$,(7.4.4)有根

$z=-2b, w=-a-(ab-c)/b$.

证毕.

定理 7.4.2 如果 $|a|+|c|>0, |b|+|c|>0$,则方程(7.4.2)振动的充要条件是 $a\geqslant 0, b\geqslant 0, c\geqslant 0$.

证明省略.

§7.5 平均技巧与振动

本节中将利用平均技巧讨论一些振动问题.

7.5.1 强迫振动

考虑方程

$$\Delta_2\Delta_1 u_{i,j}+q(i,j,u_{ij})=f_{ij}, i,j\in \mathbf{N}^+, \tag{7.5.1}$$

及伴随条件

$$\Delta_2 u_{oj}=g_j, j\in \mathbf{N}, \tag{7.5.2}$$

$$\Delta_1 u_{io}=h_i, i\in \mathbf{N}, \tag{7.5.3}$$

其中 $f=\{f_{ij}\}$, $\{g_j\}$和$\{h_i\}$是实数列,q 是 $\mathbf{N}^+\times\mathbf{N}^+\times\mathbf{R}$ 上的实值函数.易知,如果给定 γ,则(7.5.1)-(7.5.3)有解 u_{ij}使得$u_{00}=\gamma$.

设 $w=\{w_{i,j}\}, i,j\in\mathbf{N}$.设有非负整数 T 使得 $i,j\geqslant 1, i+j\geqslant T$

时，$w_{ij}>0$. 这时称 w 最终为正. 最终负的可类似定义. 设 $\{u_{ij}\}$ 是 (7.5.1) 的一个解，按如下定义 U：

$$U_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_{n-k,k}, n \in \mathbf{N}^+. \tag{7.5.4}$$

注意，(7.5.4) 是一个平均技巧. 容易证明

$$\Delta((n+1)U_n) = u_{0,n+1} + \sum_{k=0}^{n} \Delta_1 u_{u-k,k},$$

$$\Delta^2((n+1)U_n) = \Delta_2 u_{0,n+1} + \Delta_1 u_{n+1,0} + \sum_{k=0}^{n} \Delta_2\Delta_1 u_{n-k,k}.$$

假设是 $q(i,j,u) \geqslant p_{i+j}\varphi(u), i,j \geqslant 1, u \in R, p_n \geqslant 0, n \in N, \varphi$ 是 $(0,\infty)$ 上的非负凸函数. 这样，由 (7.5.1) 可知

$$\Delta^2((n+1)U_n) + (n+1)p_n\varphi(U_n) \leqslant G_n, \tag{7.5.5}$$

对所有大 n 成立，其中

$$G_n = g_{n+1} + h_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} f_{n-k,k}, n \in \mathbf{N}^+.$$

确实，由 (7.5.1) 有

$$\begin{aligned}
\Delta_2\Delta_1 u_{n-k,k} &= -q(n-k,k,u_{n-k,k}) + f_{n-k,k} \\
&\leqslant -p_n\varphi(u_{n-k,k}) + f_{n-k,k} \\
&= -(n+1)p_n\frac{\varphi(u_{n-k,k})}{n+1} + f_{n-k,k}.
\end{aligned}$$

利用 (7.5.4) 则有

$$\Delta^2((n+1)U_n) \leqslant g_{n+1} + h_{n+1} - (n+1)p_n\varphi(U_n) + \sum_{k=0}^{n} f_{n-k,k}.$$

因此，我们有如下结果.

定理 7.5.1 如果有非负数列 $\{p_n\}$ 和 $(0,\infty)$ 上的凸函数 φ，使得

$$q(i,j,u) \geqslant p_{i+j}\varphi(u), i,j \geqslant 1, u > 0,$$

且 (7.5.5) 无最终正解，则 (7.5.1) 无最终正解.

由于(7.5.5)是一个二阶差分不等式,我们已在前面给出讨论,因此,利用(7.5.5)的不存在性自然可得到(7.5.1)最终正解的不存在性.如果再对 q 做适当的限制,我们也可用平均技巧来讨论(7.5.1)的最终负解.从而,(7.5.1)的振动性可给出.

7.5.2 全平面振动

令

$$S_k = \{(i,j) \in \mathbf{Z}^2 \mid |i| + |j| = k\}, k \in \mathbf{N},$$

称 S_K 为 $\mathbf{Z}^2$ 的一个 k - 球.显然,$k \geq 1$ 时,一个 k - 球有四个角$(k,0),(-k,0),(0,k)$和$(0,-k)$,把它记为 C_k.

考虑方程

$$Lu_{ij} + q(i,j,u) = f_{ij}, \quad (i,j) \in \mathbf{Z}^2, \tag{7.5.6}$$

其中,L 是一个离散 Laplance 算子

$$Lu_{ij} = u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{ij}.$$

q 是 $\mathbf{Z}^2 \times \mathbf{R}$ 上的实值函数,f_{ij} 是 $\mathbf{Z}^2$ 上的实数列.一个实数列 $\{u_{ij}\}_{(i,j)\in Z^2}$满足(7.5.6)称为它的一个解.如此的解,如果有 K 使得$k \geq K,(i,j) \in S_k$ 时,$u_{ij} > 0$,则称其为(7.5.6)的一个最终正解.

引理 7.5.1 设$\{u_{ij}\}_{(i,j)\in Z^2}$是一个双标实数列,则对于 $k \geq 1$ 时,有

$$\begin{aligned}\sum_{(i,j)\in S_{k+1}} Lu_{ij} = {} & 3\sum_{(i,j)\in C_k} u_{ij} + 2\sum_{(i,j)\in S_k \setminus C_k} u_{ij} \\ & - 4\sum_{(i,j)\in S_{k+1}} u_{ij} + \sum_{(i,j)\in C_{k+2}} u_{ij} + 2\sum_{(i,j)\in S_{k+2}\setminus C_{k+2}} u_{ij}.\end{aligned}$$

证明 注意到和

$$\sum_{(i,j)\in S_{k+1}} Lu_{ij}$$

只属于 S_k, S_{k+1}, S_{k+2}上的和.不难看出 u_{ij}在 $S_k \setminus C_k$ 上出现两次,$(i,j) \in C_k$ 上出现三次,$S_{k+2} \setminus C_{k+2}$上出现两次,$C_{k+2}$上出现一次,

证毕.

设 $u=\{u_{ij}\}$,令

$$U_k=\frac{1}{|S_k|}\sum_{(i,j)\in S_k},k\geqslant 0, \tag{7.5.7}$$

其中 $|S_k|$ 表示 S_k 中点的个数.

引理 7.5.2 u 是(7.5.6)的一个解,U 由(7.5.7)定义,则有

$$4[2kU_k-4(k+1)U_{k+1}+(k+2)U_{k+2}]+\sum_{(i,j)\in S_{k-1}}q(i,j,u_{ij})$$
$$=\sum_{(i,j)\in S_{k+1}}f_{ij}-\sum_{(i,j)\in C_k}u_{ij}-\sum_{(i,j)\in S_{k+2}\setminus C_{k+2}}u_{ij},\quad k\geqslant 1 \tag{7.5.8}$$

和

$$4[2kU_k-4(k+1)U_{k+1}+2(k+2)U_{k\cdot 2}]+\sum_{(i,j)\in S_{k+1}}q(i,j,u_{ij})$$
$$=\sum_{(i,j)\in S_{k+1}}f_{ij}+\sum_{(i,j)\in C_{k+2}}u_{ij}-\sum_{(i,j)\in C_k}u_{ij},\quad k\geqslant 1. \tag{7.5.9}$$

证明 对 (7.5.6) 在 S_{k+1}求和,并利用引理 7.5.2,有

$$-\sum_{(i,j)\in S_{k+1}}q+\sum_{(i,j)\in S_{k+1}}f_{ij}$$
$$=\sum_{C_k}u+2\sum_{C_k}u+2\sum_{S_k\setminus C_k}u-4\sum_{S_{k+1}}u+2\sum_{C_{k+2}}u+2\sum_{S_{k+2}\setminus C_{k+2}}u-\sum_{C_{k+2}}u$$
$$=2\sum_{C_k}u-4\sum_{S_{k+1}}+2\sum_{S_{k+2}}u+\sum_{C_k}u-\sum_{C_{k+2}}u$$
$$=2|S_k|U_k-4|S_{k+1}|U_{k+1}+2|S_{K+2}|+\sum_{C_K}u-\sum_{C_{K}+2}u$$
$$=8[kU_k-2(k+1)U_{k+1}+(k+2)U_{k+2}]+\sum_{C_k}u-\sum_{C_{k+2}}u.$$

这正是(7.5.8).类似地,

$$-\sum_{S_{k+1}}q+\sum_{S_{k+1}}f$$
$$=2\sum_{S_k\setminus C_k}u+2\sum_{C_k}u+\sum_{C_k}u-4\sum_{S_{k+1}}u+\sum_{C_{k+2}}u+\sum_{S_{k+2}\setminus C_{k+2}}u+\sum_{S_{k+2}\setminus C_{k+2}}u$$

$$= 2\sum_{S_k} u - 4\sum_{S_{k+1}} u + \sum_{S_{k+2}} u + \sum_{C_k} u + \sum_{S_{k+2}\setminus C_{k+2}} u$$

$$= 4[2kU_k - 4(k+1)U_{k+1} + (k+2)U_{k+2}] + \sum_{C_k} u + \sum_{S_{k+2}\setminus C_{k+2}} u.$$

这是(7.5.9). 证毕.

(H_1): $q(i,j,u) \geqslant p(|i|+|j|)\varphi(i)$对于$(i,j)\in \mathbf{Z}^2$和$u\geqslant 0$成立, 其中$p$在$N^+$非负, φ在$(0,\infty)$上是非负凸函数.

如果(H_1)成立$u=\{u_{ij}\}$是(7.5.6)的最终正解. 由 Jensen 不等式可知

$$\begin{aligned}\sum_{S_k} q(i,j,u) &\geqslant \sum_{S_k} p(|i|+|j|)\varphi(u_{ij})\\ &= p_k\sum_{S_k}\varphi(u_{ij})\\ &\geqslant p_k|S_k|\varphi(U_k)\\ &= 4kp_k\varphi(U_k).\end{aligned}$$

记

$$F_k = \frac{1}{|S_k|}\cdot\sum_{S_k} f_{ij},$$

这样, 由(7.5.6)有

$$\begin{aligned}&4[2(k-1)U_{k-1} - 4kU_k + (k+1)U_{k-1}] + 4kp_k\varphi(U_k)\\ &\leqslant \sum_{S_k} f_{ij} - \sum_{C_{k-1}} u_{ij} - \sum_{S_{k+1}\setminus C_{k+1}} u_{ij}\\ &\leqslant 4kF_k,\quad k\geqslant 2.\end{aligned}$$

于是, 我们有如下结果:

定理 7.5.2 假设(H_1)成立, $u=\{u_{ij}\}$是(7.5.6)的最终正解, 则

$$2(k-1)U_{k-1} - 4kU_k + (k+1)U_{k+1} + kp_k\varphi(u_k) \leqslant kF_k \tag{7.5.10}$$

有最终正解.

(7.5.10) 可以写成

$$\Delta^2((k-1)U_{k-1})-2kU_k+(k-1)U_{k-1}+kp_k\varphi(U_k)\leqslant kF_k.$$

类似地,我们也有下面结果:

定理 7.5.3 假设(H_1)成立,u 是 (7.5.6) 的一个正解,且当 $i\geqslant 0$时 $\Delta^2 u_{i0}\leqslant 0$, $i\leqslant -1$ 时 $\Delta_2 u_{i0}\geqslant 0$, $j\geqslant 0$ 时 $\Delta_2 u_{0j}\leqslant 0$, $j\leqslant -1$ 时 $\Delta_2 u_{0j}\geqslant 0$, U_k 由(7.5.7)定义,它满足递推关系

$$2(k-1)U_{k-1}-4kU_k+2(k+1)U_{k+1}+kp_k\varphi(U_k)\leqslant kF_k. \tag{7.5.11}$$

(7.5.11)可以写成

$$2\Delta^2((k-1)U_{k-1})+kp_k\varphi(U_k)\leqslant kF_k,$$

或者

$$2\Delta(k(k-1)\Delta U_{k-1})+k^2p_k\varphi(U_k)\leqslant k^2F_k.$$

7.5.3 抛物型方程

考虑抛物方程

$$\Delta_2 u_{ij}=a_j\Delta_1^2 u_{i-1,j}-q_{ij}f(u_{i,j-\sigma}),1\leqslant i\leqslant n,j\in N, \tag{7.5.12}$$

其中 σ 是非负整数,$a_j>0$,$j\in \mathbf{N}$,f 是 $\mathbf{R}$ 上的实值函数.给定条件

$$u_{0,j}+\alpha_j u_{1,j}=0,j\in \mathbf{N}, \tag{7.5.13}$$

$$u_{n+1,j}+\beta_j u_{n,j}=0,j\in \mathbf{N}, \tag{7.5.14}$$

其中 $\alpha_j+1\geqslant 0$, $\beta_j+1\geqslant 0$, $j\in\mathbf{N}$. 这时,如果再在$[0,n+1]\times[-\sigma,0]$给定初始条件 $\rho=\{\rho_{ij}\}$, 则(7.5.12) − (7.5.14)存在唯一解 $\{u_{ij}\}$, 使得$(i,j)\in[0,n+1]\times[-\sigma,0]$时有 $u_{ij}=\rho_{ij}$. 这是一个偏差分方程的初边值问题. 假设$(i,j)\in[1,n]\times\mathbf{N}$ 时 $q_{ij}\geqslant 0$, 令 $Q_j=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}q_{ij}$, $j\in\mathbf{N}$. f 是$(0,\infty)$上的非负非减凸函数, $\{u_{ij}\}$是(7.5.12)的最终正解. 即有 T 使得$(i,j)\in[i,n]\times[T,\infty]$时 $u_{ij}>0$, 由(7.5.12)可知

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta_2 u_{ij} = \frac{a_j}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta_1^2 u_{i-1,j} - \sum_{i=1}^{n}\frac{q_{ij}}{n}f(u_{i,j-\sigma}).$$

注意到 f 的凸性，于是有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{q_{ij}}{n}f(u_{i,j-\sigma}) \geqslant Q_j f\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}u_{i,j-\sigma}\Big).$$

因此

$$\Delta w_j + Q_j f(w_{j-\sigma}) \leqslant 0, j \in N, \tag{7.5.15}$$

其中

$$w_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\infty}u_{ij}, j \geqslant -\sigma.$$

于是有如下结果：

定理 7.5.4　假设 $j\in N$ 时 $a_j\geqslant 0, \alpha_j\geqslant -1, \beta_j\geqslant -1, (i,j)\in[1,n]\times\mathbf{N}$ 时 $q_{ij}\geqslant 0$，f 是 $(0,\infty)$ 上的非负非减凸函数，方程(7.5.12)－(7.5.14) 有最终正解，则 (7.5.15)也有最终正解.

7.5.4　双曲型方程

考虑双曲型偏差分方程

$$\Delta_2^2 u_{i,j-1} - \Delta_1^2 u_{i-1,j} + q(i,j,u_{i,j}) = f_{ij}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, j \geqslant 1, \tag{7.5.16}$$

及伴随条件

$$\Delta_1 u_{0,j} = g_j, j \geqslant 0, \tag{7.5.17}$$

$$\Delta_1 u_{n,j} = h_j, j \geqslant 0, \tag{7.5.18}$$

其中 $\{f_{ij}\}$，$\{g_i\}$ 和 $\{h_j\}$ 是实的，q 是 $[1,n]\times\mathbf{N}\times\mathbf{R}$ 上的实值函数. 给定

$$\Psi = \{\Psi_{ij} \mid 1 \leqslant i \leqslant n, j = 0,1\},$$

可确定(7.5.16)－(7.5.18) 的唯一解. 令

$$U_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}u_{ij}, \quad j \in \mathbf{N}. \tag{7.5.19}$$

定理7.5.5　假设$(i,j)\in[1,n]\times\mathbf{N}$, $u\in\mathbf{R}$时有$q(i,j,u)\geqslant p_j\varphi(u)$,其中$p_j\geqslant 0$, φ是$(0,\infty)$上的非负凸函数,u_{ij}是(7.5.16)-(7.5.17)的最终正解,U_j由(7.5.19)定义.有

$$\Delta^2 U_{j-1}+p_j\varphi(U_j)\leqslant F_j$$

最终成立,其中

$$F_j=\frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{h}f_{ij}+h_j-g_j\right\}.$$

证明　对(7.5.16)求和并除以n,则有

$$\Delta^2 U_{j-1}=\frac{h_j-g_j}{n}+\sum_{i=1}^{n}\frac{f_{ij}}{n}-\sum_{i=1}^{n}\frac{q(i,j,u_{ij})}{n}.$$

由q和φ的凸性可知结论成立.证毕.

§7.6　椭圆型方程

考虑方程

$$Lu_{ij}+q_{ij}u_{ij}=0, 1\leqslant i\leqslant n, j\geqslant 1, \tag{7.6.1}$$

给定边界条件

$$u_{0j}=0=u_{n+1,j}, j\geqslant 1. \tag{7.6.2}$$

这时候,给定初始条件,可确定(7.6.1)的唯一解u_{ij}.

引理7.6.1　设$\{u_{ij}\}$是(7.6.1)在$[0,n+1]\times[s-1,t+1]$上的解,$(i,j)\in[1,n]\times[s,t]$时,$u_{ij}>0$,且满足条件

$$u_{0j}=0=u_{n+1,j}, j\in[s,t], \tag{7.6.3}$$

$$\Delta_2 u_{it}=-\beta_i u_{it}, i\in[1,n], \tag{7.6.4}$$

$$\Delta_2 u_{i,s-1}=\alpha_i u_{is}, i\in[1,n], \tag{7.6.5}$$

其中,$\alpha_i\geqslant 1$, $\beta_i\geqslant 1$, $i\in[1,n]$. $(i,j)\in[1,n]\times[s,t]$时有$Q_{ij}\geqslant q_{ij}$,则方程

$$Lv_{ij}+Q_{ij}v_{ij}=0, (i,j)\in[1,n]\times\mathbf{N}^+, \tag{7.6.6}$$

$$v_{0j}=0=v_{n+1,j},s\leqslant j\leqslant t,\tag{7.6.7}$$

在$[1,n)\times[s-1,t+1]$上的解 v_{ij}不可能保持全正.

证明 假设 (7.6.6)—(7.6.7) 的解 v_{ij}当$(i,j)\in[1,n)\times[s-1,t+1]$时有 $v_{ij}>0$. 那么，记

$$\Delta_2 v_{i,s-1}=\sigma_i v_{i,s},\quad 1\leqslant i\leqslant n,\tag{7.6.8}$$

其中,$\sigma_i=1-v_{i,s-1}/v_{is}$.同样地有

$$\Delta_2 v_{it}=-\tau_i v_{it},\quad 1\leqslant i\leqslant n,\tag{7.6.9}$$

其中显然 $i\in[1,n]$时 $\tau_i<1$,由 (7.6.1) 和 (7.6.6) 有

$$\begin{aligned}0=&v_{ij}[\Delta_1^2 u_{i-1,j}+\Delta_2^2 u_{i,j-1}+q_{ij}u_{ij}]\\&-u_{ij}[\Delta_1^2 v_{i-1,j}+\Delta_2^2 v_{i,j-1}+Q_{ij}v_{ij}]\\=&v_{ij}\Delta_1^2 u_{i-1,j}-u_{ij}\Delta_1^2 v_{i-1,j}+v_{ij}\Delta_2^2 u_{i,j-1}\\&-u_{ij}\Delta_2^2 v_{i,j-1}-(Q_{ij}-q_{ij})u_{ij}v_{ij}.\end{aligned}$$

注意到 (7.6.3)和 (7.6.7), 则有

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}[v_{ij}\Delta_1^2 u_{i-1,j}-u_{ij}\Delta_1^2 v_{i-1,j}]\\=&\sum_{i=1}^{n}\Delta_1[v_{ij}\Delta u_{i-1,j}-u_{ij}\Delta_1 v_{i-1,j}]=0.\end{aligned}$$

再由(7.6.4),(7.6.5),(7.6.8)和(7.6.9),则有

$$\begin{aligned}&\sum_{j=s}^{t}[v_{ij}\Delta_2^2 u_{i,j-1}-u_{ij}\Delta_2^2 v_{i,j-1}]\\=&\sum_{j=s}^{t}\Delta_2[v_{ij}\Delta_2 u_{i,j-1}-u_{ij}\Delta_2 v_{i,j-1}]\\=&v_{i,t+1}\Delta u_{it}-u_{i,t+1}\Delta_2 v_{it}-v_{is}\Delta_2 u_{i,s-1}+u_{is}\Delta_2 v_{i,s-1}\\=&(1-\tau_i)v_{it}(-\beta_i u_{it})-(1-\beta_i)u_{it}(-\tau_i)v_{it}-v_{is}(\alpha_i u_{is})+u_{is}(\sigma_i v_{is})\\=&(\tau_i-\beta_i)u_{it}v_{it}+(\sigma_i-\alpha_i)u_{is}v_{is}.\end{aligned}$$

因此

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=s}^{t} (Q_{ij} - q_{ij}) u_{ij} v_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [(\tau_i - \beta_i) u_{it} v_{it} + (\sigma_i - \alpha_i) u_{is} v_{is}] < 0.$$

这是一个矛盾. 证毕.

现在我们考虑特征问题

$$\Delta^2 x_{i-1} + \lambda x_i = 0, 1 \leqslant i \leqslant n.$$

它有一特征值

$$\lambda_1 = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{2n+2}\right),$$

及对应的特征解

$$x_i = \begin{cases} 0, & i = 0, n+1, \\ \sin(i\pi/(n+1)), & 1 \leqslant i \leqslant n. \end{cases}$$

它在$[1, n]$上是正的. 设 y_j 是方程

$$\Delta^2 y_{j-1} + (q_j - \lambda_1) y_j = 0, j \geqslant 1 \tag{7.6.10}$$

的解, 类似 §7.2 的方法易证 $u_{ij} = x_i y_j$ 是偏差分方程

$$\Delta_1^2 u_{i-1,j} + \Delta_2^2 u_{i,j-1} + q_j u_{ij} = 0, 1 \leqslant i \leqslant n, j \geqslant 1 \tag{7.6.11}$$

的一个解, 且满足边值条件 $u_{0j} = u_{n+1,j}, j \geqslant 1$. 如果 y_j 是(7.6.10)的一个振动解, 则对任意 M, 有 s 和 t 使得, $M < s \leqslant t$, $y_{s-1} y_s \leqslant 0$, $y_t y_{t+1} \leqslant 0$, 且 $j \in [s, t]$时有 $y_j > 0$. 这时, 记 $\Delta y_{s-1} = \alpha y_s$, $\Delta y_t = -\beta y_t$, 显然有 $\alpha, \beta \geqslant 1$. 于是有如下结果:

定理 7.6.1 如果差分方程

$$\Delta^2 y_{j-1} + \left(q_j - 4\sin^2\left(\frac{\pi}{2n+2}\right)\right) y_j = 0, j \geqslant 1$$

振动, 且

$$Q_{ij} \geqslant q_j, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, j \geqslant 1,$$

则边值问题

$$\Delta_1^2 v_{i-1,j} + \Delta_2^2 v_{i,j-1} + Q_{ij} v_{ij} = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, j \geqslant 1,$$

$$v_{0j} = v_{n+1,j}, \quad j \geqslant 1$$

的每一个解振动.

§7.7 时滞偏差分方程最终正解的不存在性

在§7.3中,我们已经讨论了方程

$$u_{i+1,j} + u_{i+1,j} - u_{ij} + p_{ij}u_{i-\sigma,j-\tau} = 0, i, j \in N, \quad (7.7.1)$$

最终正解的存在性,本节中将研究其不存在性,其中 σ, τ 是非负整数,$\{p_{ij}\}$是非负实数列.

如果(7.7.1)有最终正解,则

$$u_{i+1,j} + u_{i,j+1} - u_{i,j} \leqslant 0$$

最终成立.于是最终有 $u_{i+1,j} \leqslant u_{ij}, u_{i,j+1} \leqslant u_{ij}$.

引理 7.7.1 设$\{u_{ij}\}$是(7.7.1)的最终正解,

$$\sum_{i=0}^{\sigma-1}\sum_{j=0}^{\tau-1} p_{m+1,n+j} \geqslant M > 0$$

对所有的大 m 和大 n 成立,则最终有

$$u_{mn} \geqslant M^{\sigma+\tau}u_{m-\sigma,n-\tau}.$$

证明 从充分大的 m 和 n 对(7.7.1)求和,则有

$$\sum_{i=m}^{m+\sigma}\sum_{j=n+1}^{n+\tau} u_{i+1,j} + \sum_{i=m}^{m+\sigma} u_{i,n+1+\sigma,n} - u_{mn} + \sum_{i=m}^{m+\sigma}\sum_{j=n}^{n+\tau} p_{ij}u_{i-\sigma,j-\tau} = 0.$$

于是

$$u_{mn} \geqslant \sum_{i=m}^{m+\sigma}\sum_{i=n}^{n+\tau} p_{ij}u_{i-\sigma,j-\tau} \geqslant \max\left\{\sum_{i=m}^{m+\sigma}\sum_{j=n}^{n+\tau} p_{ij}u_{i-1,j}, \sum_{i=m}^{m+\sigma}\sum_{j=n}^{n+\tau} p_{ij}u_{i,j-1}\right\}$$

$$\geqslant M\max\{p_{m-1,n}, u_{m,n-1}\}.$$

重复如上过程,则有

$$u_{mn} \geqslant M^{\sigma+\tau}u_{m-\sigma,n-\tau}.$$

证毕.

定理 7.7.1 如果

$$\lim_{m,n\to\infty}\frac{1}{\sigma\tau}\sum_{i=m-\sigma}^{m-1}\sum_{j=n-\tau}^{n-1}p_{ij}\geqslant\frac{1}{2^{\lambda}}\frac{\lambda^{\lambda}}{(\lambda+1)^{\lambda+1}},\tag{7.7.2}$$

其中 $\lambda=2\sigma\tau/(\sigma+\tau)$，则(7.7.1)无最终正解.

证明 由(7.7.1)知

$$u_{i+1,j}+u_{i,j+1}-u_{ij}\leqslant-p_{ij}u_{ij}.$$

因此

$$p_{ij}\leqslant1-\frac{u_{i+1,j}+u_{i,j+1}}{u_{ij}}\leqslant1-\frac{2(u_{i+1,j}u_{i,j+1})^{\frac{1}{2}}}{u_{ij}}.$$

而由(7.7.2)可知，有正数 α 使得

$$\frac{1}{2^{\lambda}}\frac{\lambda^{\lambda}}{(\lambda+1)^{\lambda+1}}<\alpha\leqslant\frac{1}{\sigma\tau}\sum_{i=m-\sigma}^{m-1}\sum_{j=n-\tau}^{n-1}p_{ij}$$

$$\leqslant\frac{1}{\sigma\tau}\sum_{i=m-\sigma}^{m-1}\sum_{j=n-\tau}^{n-1}\left\{1-\frac{2(u_{i+1,j}u_{i,j+1})^{\frac{1}{2}}}{u_{ij}}\right\}.$$

而由算术几何不等式有

$$\sum_{i=m}^{m-1}\sum_{j=n}^{n-1}\left\{1-\frac{2(u_{i+1,j}u_{i,j+1})^{\frac{1}{2}}}{u_{ij}}\right\}$$

$$\geqslant\sum_{i=m}^{m-1}\tau\left\{\prod_{j=n-\tau}^{n-1}\frac{(u_{i+1,j}u_{i,j+1})^{\frac{1}{2}}}{u_{ij}}\right\}^{\frac{1}{\tau}}$$

$$=\tau\sum_{i=m}^{m-1}\left\{\frac{u_{in}}{u_{i,n-\tau}}\prod_{j=n-\tau}^{n-1}\frac{u_{i+1,j}}{u_{ij}}\right\}^{\frac{1}{2\tau}}$$

$$=\sigma\tau\prod_{i=m-\sigma}^{m-1}\left\{\frac{u_{i,n}}{u_{i,n-\sigma}}\right\}^{\frac{1}{2\sigma\tau}}\prod_{i=m-\tau}^{m-1}\prod_{j=n-\tau}^{n-1}\left\{\frac{u_{i+1,j}}{u_{ij}}\right\}^{\frac{1}{2\sigma\tau}}$$

$$=\sigma\tau\prod_{i=m-\sigma}^{m-1}\left\{\frac{u_{i,n}}{u_{i,n-\sigma}}\right\}^{\frac{1}{2\sigma\tau}}\prod_{j=n-\tau}^{n-1}\left\{\frac{u_{mj}}{u_{m-\sigma,j}}\right\}^{\frac{1}{2\sigma\tau}}$$

$$\geqslant \sigma\tau \left\{ \frac{u_{mn}}{u_{m-\sigma,n-\tau}} \right\}^{\frac{(\sigma+\tau)}{2\sigma\tau}}.$$

于是

$$1-\alpha \geqslant \sigma\tau \left\{ \frac{u_{mn}}{u_{m-\sigma,n-\tau}} \right\}^{\frac{(\sigma+\tau)}{2\sigma\tau}} = 2\left\{ \frac{u_{mn}}{u_{n-\sigma,n-\tau}} \right\}^{2}.$$

$0<\alpha<1$ 是显然的，由不等式

$$1-\alpha \leqslant \left\{ \frac{\lambda^{\lambda}}{(1+\lambda)^{\lambda+1}} \right\}^{\frac{1}{\lambda}} \alpha^{\frac{-1}{\lambda}}, 0 \leqslant \alpha \leqslant 1,$$

可知

$$\frac{u_{ij}}{u_{i-\sigma,j-\tau}} \leqslant \frac{1}{2\lambda} \frac{\beta}{\alpha},$$

其中 $\beta = \lambda^{\lambda}/(2^{\lambda}(\lambda+1)^{(\lambda+1)})$. 代入 (7.7.1)，则有

$$u_{i+1,j} + u_{i,j+1} - u_{ij} \leqslant p_{ij} \frac{\alpha}{\beta} u_{0}$$

最终成立. 重复上过程，则有

$$\frac{u_{ij}}{u_{i-\sigma,u_{j-\tau}}} \leqslant \left(\frac{1}{2\lambda} \frac{\beta}{\alpha} \right)^{k}.$$

这与引理 7.7.1 矛盾. 证毕.

§7.8 注记

有关偏差分方程的振动性讨论，有相当一部分是借助于差分方程的方法. 例如，[129] - [139]就建立了偏分方程的类似于常差分方程的基本理论. 但这些基本事实，我们并没有列入书中，有兴趣的读者可参阅它们. §7.1 是有关行波解的讨论，在 Cheng 等[140]中可找到. §7.2 则来源于 Cheng 和 Medina 的[141]. §7.3 的内容可在[147]中找到. §7.4 的内容请看[145]. 有关平均技巧的利用，请参阅[135] - [139]及[142]. §7.6 是由 Cheng 在[131]中给出. §7.7

的研究结果甚多，我们只选择了 Cheng 等[143]，但我们的证明则采用了[29]中的方法.

第八章 具有连续变量的差分方程

具连续变量的差分方程研究工作较早,我们可参考[155]和[156]及其参考文献.但有关振动性工作就作者所知始于[157].本章就这方面的工作做一介绍.

§ 8.1 常系数方程

考虑常系数差分方程:

$$y(t)+p_1y(t-\tau_1)+p_2y(t-\tau_2)=0, \tag{8.1.1}$$

其中 $p_1,p_2,\tau_1,\tau_2\in\mathbf{R}$.不失一般性,我们可以假设 τ_1 和 τ_2 是正数,否则也可变换成如此的形式.因此,我们将把(8.1.1)称为 时滞差分方程,方程(8.1.1)也叫做一个泛函方程.令,

$$\tau=\max\{\tau_1,\tau_2\},t_0\geqslant 0.$$

方程 (8.1.1) 的一个解是定义在$[t_0-\tau,R)$上的一个连续函数且当 $t\geqslant t_0$ 时满足 (8.1.1).如此的解如果其零点集是无界的,则称此解振动.

给定初始条件 $t_0-\tau\leqslant t\leqslant t_0, y(t)=p(t)$和相容条件

$$\varphi(t_0)+p_1\varphi(t_0-\tau_1)+p_2\varphi(t_0-\tau_2)=0,$$

通过分步法,可求得 (8.1.1) 唯一的解 $y(t),t\geqslant t_0-\tau$.

定理 8.1.1 方程 (8.1.1) 所有解振动的充要条件是特征方程

$$1+p_1e^{-\lambda\tau_1}+p_2e^{-\lambda\tau_2}=0 \tag{8.1.2}$$

无实根.

如果 (8.1.1) 所有解振动,显然可知(8.1.2)无实根.否则,λ_0 是 (8.1.2) 的实根,则 $y(t)=e^{\lambda_0t}$是 (8.1.1)的最终正解.因此,我们主

要证明其逆成立.

$p_1,p_2,\tau_1,\tau_2(\tau_1,\tau_2)=0$ 时,方程相当简单.因此我们将排除这种情况. $p_1,p_2\in(0,\infty)$ 时(8.1.1)不可能有正解,(8.1.2)无实根.于是,我们将假设 $\tau_1>\tau_2>0,p_1p_2\neq0$ 且 p_1 或 p_2 为负.

设 $F(\lambda)=1+p_1\lambda^{-\lambda\tau_1}+p_2\lambda^{-\lambda\tau_2}$,则 $F(\infty)=1$.这时,当 $F(0)=1+p_1+p_2>0,p_1>0$ 时(8.1.2)无实根(否则 $F(-\infty)=-\infty$).所以证明其逆成立,我们只假设

$$p_1>0,\quad p_2<0,\quad 1+p_1+p_2>0,\quad \tau_1>\tau_2>0. \tag{8.1.3}$$

为此我们先看几个引理.

引理 8.1.1 如果 $y(t)$ 是(8.1.1)的解, $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$,则 $\int_{-\alpha}^{-\beta}(y)(s)\mathrm{d}s$ 也是(8.1.1)的解.

引理 8.1.1 是显然的,证明省略.

我们设 S^0 是函数 $z(t)$ 的集合,其中 $z(t)$ 是最终正的可微和严格递减的且 $\lim\limits_{t\to\infty}z(t)=0$. S^∞ 是最终正的严格单增可微且满足 $\lim\limits_{t\to\infty}z(t)=\infty$ 的函数集合.

对于 $z(t)\in S^0$,定义

$$\Lambda^0(z)=\{\lambda\geqslant0:z'(t)+\lambda z(t)\leqslant0\text{ 最终成立}\};$$

对于 $z(t)\in S^\infty$,定义

$$\Lambda^\infty(z)=\{\lambda\geqslant0:-z'(t)+\lambda z(t)\leqslant0\text{ 最终成立}\}.$$

引理8.1.2 假设(8.1.3)成立, $y(t)$ 是(8.1.1)的最终正解,则 $S^0\cup S^\infty\neq\varnothing$.特别地

$$z(t)=\int_{-\tau_2}^{t}y(s)\mathrm{d}s-p_1\int_{-\tau_1}^{-\tau_2}y(s)\mathrm{d}s,$$

则 $z(t)\in S^0$ 或 $-z(t)\in S^\infty$.

引理的证明省略.

引理 8.1.3　假设(8.1.3)成立，则(a)：如果 $S^0 \neq \varnothing$，则 $-p_1/p_2 \in (0,1)$.(b)：如果(8.1.1)有一个解是最终正的无界的，那么 $p_2 < -1$.

证明　(a)：如果 $z(t) \in S^0$，那么

$$z(t) = -p_1 z(t-\tau_1) - p_2 z(t-\tau_2),$$

也有

$$z(t) > (-p_1/p_2) z(t-(\tau_1-\tau_2)).$$

因此

$$-p_1/p_2 \in (0,1).$$

(b)：设 $y(t)$ 是(8.1.1)最终正的无界解，则

$$y(t) + p_2 y(t-\tau_2) = -p_1 y(t-\tau_1) < 0.$$

因此

$$y(t) < -p_2 y(t-\tau_2).$$

于是，$p_2 < -1$. 否则 $y(t)$ 有界. 证毕.

引理 8.1.4　如果(8.1.3)成立且 $z(t) \in S^0$，则 $\Lambda^0(z)$ 非空且有上界 $\lambda_0^* = -\frac{1}{\tau_1-\tau_2}\ln(-p_1/p_2)$. 因此，如果定义

$$w_0(t) = \int_{-\tau_2}^{t} z(s)\mathrm{d}s - p_1\int_{t-\tau_1}^{t-\tau_2} z(s)\mathrm{d}s, \tag{8.1.5}$$

$$w_n(t) = \int_{\tau_2}^{t} w_{n-1}(s)\mathrm{d}s - p_1\int_{t-\tau_1}^{t-\tau_2} w_{n-1}(s)\mathrm{d}s,$$

则有

$$w'_n = -(1+p_1+p_2)w_{n-1}(t-\tau_2),\ w_n \in S^0,$$

λ_0^* 是 $\Lambda^0(w_n)$ 的上界且

$$\lambda_0 = (1+p_1+p_2)/\tau_2 \in \Lambda^0(w_n).$$

证明　先证 λ_0^* 是 $\Lambda^0(z)$ 的上界. 假设矛盾，则有 $\lambda_0^* \in \Lambda^0(z)$. 从而最终有 $z'(t) + \lambda_0^* z(t) \leqslant 0$. 令

$$\varphi(t) = z(t)e^{\lambda_0^* t},$$

显然有 $\varphi'(t)\leqslant 0$. 于是

$$\varphi(t) \leqslant \varphi(t-(\tau_1-\tau_2)).$$

故

$$\begin{aligned} z(t) &= \varphi(t)e^{-\lambda_0^* t} \leqslant \varphi(t-(\tau_1-\tau_2))e^{\lambda_0^* /(\tau_1\tau_2)} \\ &= z(t-(\tau_1-\tau_2))(-p_1/p_2) \end{aligned}$$

与

$$z(t) > (-p_1/p_2)z(t-(\tau_1-\tau_2))$$

矛盾. 从而有 $\Lambda^0(z)\leqslant\lambda_0^*$. 接下来证明 $\lambda_0^*\in\Lambda^0(w_n)$. 由(8.1.5)可知

$$w_0(t)\leqslant \tau_2 z(t-\tau_2).$$

于是

$$w'_0(t) = -(1+p_1+p_2)z(t-\tau_2)\leqslant -((1+p_1+p_2)/\tau_2)w_0(t).$$

这就证得 $\lambda_0\in\Lambda^0(w_0)$. 归纳可证 $\lambda_0\in\Lambda_0(w_n)$. 证毕.

引理 8.1.5 假设(8.1.3)成立, $z\in S^\infty$, 则 $S^\infty(z)$非空且有上界 $\lambda_\infty^* = \ln(-p_2)/\tau_2$. 如果定义

$$w_0(t) = -\int_{-\tau_2}^{t} z(s)\mathrm{d}s + p_1\int_{-\tau_1}^{-\tau_2} z(s)\mathrm{d}s,$$

$$w_n(t) = -\int_{t-\tau_2}^{t} w_{n-1}(s)\mathrm{d}s + p_1\int_{t-\tau_1}^{t-\tau_2} w_{n-1}(s)\mathrm{d}s, \quad (8.1.6)$$

则有

$$w'_n(t) = (1+p_1+p_2)w_{n-1}(t-\tau_2), w_n\in S^\infty,$$

$\lambda_\infty^*(w_n)$是$\Lambda^\infty(w_n)$的上界且

$$\lambda_\infty \in (1+p_1+p_2)/(p_1(\tau_1-\tau_2))\in\Lambda^\infty(w_n).$$

引理 8.1.5 的证明类似引理 8.1.4. 故省略.

最后给出定理 8.1.1 的证明. 假设(8.1.2)无实根且(8.1.3)成

立.则 $1+p_1e^{-\lambda\tau_1}+p_2e^{-\lambda\tau_2}$有最小值.设有正数 m 使得 $\lambda\in\mathbf{R}$,有 $1+p_1e^{-\lambda\tau_1}+p_2e^{-\lambda\tau_2}\geqslant m$.分两种情况给出证明.

1° $S^0\neq\varnothing$,令,

$$\mu=[m\lambda_0/(1+p_1)]e^{-\lambda_0^*\tau_2}.$$

我们将证明

$$\lambda_n=\lambda_0+n\mu\in\Lambda^0(w_n). \tag{8.1.7}$$

从而有 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=\infty$,这与 $\Lambda^0(w_n)$有界矛盾.

$n=0$ 时,(8.1.7)显然成立;假设 $n=k$ 时(8.1.7)也成立. 令 $\varphi_k(t)=w_k(t)e^{\lambda_k t}$,则 $\varphi'_k(t)\leqslant 0$ 最终成立.由引理8.1.4可知

$$\begin{aligned}
& w'_{k+1}(t)+\lambda_{k+1}w_{k+1}(t)\\
&=-(1+p_1+p_2)w_k(t-\tau_2)+(\lambda_k+\mu)\\
&\quad\times\left[\int_{t-\tau_2}^{t}w_k(s)\mathrm{d}s-p_1\int_{-\tau_1}^{-\tau_2}wk(s)\mathrm{d}s\right]\\
&\leqslant\varphi_k(t-\tau_2)e^{-\lambda_k t}[-(1+p_1+p_2)e^{\lambda_k\tau_2}\\
&\quad+(\lambda_k+\mu)\int_{t-\tau_2}^{t}e^{\lambda_k(t-s)}\mathrm{d}s\\
&\quad-p_1(\lambda_k+\mu)\int_{t-\tau_1}^{t-\tau_2}e^{\lambda_k(t-s)}\mathrm{d}s]\\
&\leqslant\varphi_k(t-\tau_2)e^{-\lambda_k t}[-1-p_1e^{\lambda_k\tau_1}-p_2e^{\lambda_k\tau_2}\\
&\quad+(\mu/\lambda_k)(1+p_1)e^{\lambda_k\tau_2}]\\
&\leqslant\phi_k(t-\tau_2)e^{-\lambda_k t}[-m+(\mu/\lambda_0)(1+p_1)e^{\lambda_0^*\tau_2}]\\
&\leqslant 0.
\end{aligned}$$

即,$\lambda_{k+1}\in\Lambda^0(w_{k+1})$.

2° $S^0\neq\varnothing$.令$\infty=\mu=[m\lambda_\infty/(1+p_1)]e^{\lambda_*\tau_2}$.类似1°可证明$\lambda_n=\lambda_\infty+n\mu\in\Lambda^\infty(w_n)$.这与$\Lambda^\infty(w_n)$有界矛盾.证毕.

方程 $y(t)+py(t-\tau)=0$ 振动的充要条件显然是 $p\geqslant 0$.对于方

程(8.1.1),当 $p_1p_2\tau_1\tau_2(\tau_1-\tau_2)\neq0$ 时,它变成如上方程.而 $p_1,p_2\in(0,\infty)$显然振动.于是假设

$$p_1p_2\tau_1\tau_2(\tau_1-\tau_2)\neq0,p_1 \text{ 或 } p_2 \text{ 为负}. \tag{8.1.8}$$

不失一般性,可设 $\tau_1>\tau_2>0$.但这时 $p_1>0$ 是(8.1.1)振动的必要条件,于是,我们可把(8.1.1)写成

$$x(t)-px(t-\tau)+qx(t-\sigma)=0, \tag{8.1.9}$$

其中 $p,q,\tau,\sigma\in(0,\infty),\tau<\sigma$.

定理 8.1.2 方程(8.1.9)振动的充要条件是

$$q^{\lambda}\sigma^{\sigma}>p^{\sigma}\tau^{\tau}(\sigma-\tau)^{\sigma-\tau}.$$

证明 由定理 8.1.1 可知:(8.1.9)振动当且仅当

$$F(\lambda)=1-pe^{-\lambda\tau}+qe^{-\lambda\sigma}=0$$

无实根.$F(\infty)=1,F(-\infty)=\infty$,于是(8.1.9)振动的充要条件是 $F(\lambda)$的所有实根的最小值是正的.但 $F(\lambda)$有唯一临界点 $\lambda_0=-\frac{1}{\sigma-\tau}\ln\left(\frac{q\sigma}{p\tau}\right)$.于是,方程(8.1.9)振动当且仅当

$$1-p\left(\frac{q\sigma}{p\tau}\right)^{-\frac{\tau}{\sigma-\tau}}+q\left(-\frac{q\sigma}{p\tau}\right)^{-\frac{\sigma}{\sigma-\tau}}>0.$$

证毕.

§8.2 非振动解存在的充要条件

考虑强迫方程

$$y(t)+p_1y(t-\tau_1)-p_2y(t-\tau_2)=m, \tag{8.2.1}$$

其中 $p_1,p_2,\tau_1,\tau_2\in(0,\infty),m\in\mathbf{R}$.$m=0$ 时,(8.2.1)变为

$$y(t)+p_1y(t-\tau_1)-p_2y(t-\tau_2)=0. \tag{8.2.2}$$

由上节知识可知,(8.2.2)振动当且仅当

$$1+p_1e^{-\lambda\tau_1}-p_2e^{-\lambda\tau_2}=0 \tag{8.2.3}$$

无实根.

定理 8.2.1 假设

$$\tau_1 \neq \tau_2, \quad 1 + p_1 - p_2 > 0, \tag{8.2.4}$$

则(8.2.1)有无界正解的充要条件是(8.2.3)有正根.

证明 若(8.2.3)有正根 λ_0,则 $x(t) = e^{\lambda_0 t}$ 是(8.2.2)的一个无界解.注意到 $\bar{y} = \dfrac{m}{1 + p_1 + p_2}$ 是(8.2.1)的一个平衡解,因此,$y(t) = x(t) + \bar{y}$ 是(8.2.1)的一个解.

如果

$$F(\lambda) = 1 + p_1 e^{-\lambda\tau_1} - p_2 e^{-\lambda\tau_2}$$

无实根.由于 $F(\infty) = 1, F(0) = 1 + p_1 - p_2 > 0$,则 $\lambda \geqslant 0$ 时有 $F(\lambda) > 0$.若 $y(t)$ 是(8.2.1)的解,则有 $k > 0$ 使得 $|y(t)| = O(e^{kt})$.事实上,令 $y_m(r) = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant r} |y(t)|$.显然,$y_m(t)$ 递增且 $t \leqslant r$ 时有

$$\begin{aligned} |y(t)| &\leqslant |p_1| |y(t - \tau_1)| + |p_2| |y(t - \tau_2)| \\ &\leqslant (|p_1| + |p_2|) y(r - \min(\tau_1, \tau_2)), \end{aligned}$$

且 $y_m(r) \leqslant (|p_1| + |p_2|) y_m(r - \min(\tau_1, \tau_2))$.即 $y_m(r)$ 是指数增长的,从而 $y(t)$ 也是指数增长的.

设 $y(t)$ 是(8.2.1)的无界最终正解,则有 $t_1 \geqslant t_0, M > 0$ 使得 $t \geqslant t_1$ 时 $y(t) > M$.对 $y(t)$ 做变换,有

$$Y(s) = \int_0^\infty e^{-st} y(t) \mathrm{d}t. \tag{8.2.5}$$

假设(8.2.1)在 $-\tau \leqslant t \leqslant 0$ 上 $y(t) = \varphi(t)$ 的初始条件成立.定义

$$\varphi(s) = -p_1 e^{-s\tau_1} \int_{-\tau_1}^0 e^{-st} y(t) \mathrm{d}t + p_2 e^{-s\tau_2} \int_{-\tau_2}^0 e^{-st} \varphi(t) \mathrm{d}t.$$

如果 $Y(s)$ 的收敛坐标为 α,则对于 $s > \alpha$,有

$$F(s) Y(s) = \varphi(s) + m \int_0^\infty e^{-st} \mathrm{d}t. \tag{8.2.6}$$

显然 $\alpha \geqslant 0$.由(8.2.6)有

$$Y(s) - \frac{m\int_0^\infty e^{-st}\mathrm{d}t}{F(s)} = \frac{\varphi(s)}{F(s)}, s > a.$$

即

$$\int_0^\infty e^{-st}\left(y(t) - \frac{m}{F(s)}\right)\mathrm{d}t = \frac{\varphi(s)}{F(s)}. \qquad (8.2.7)$$

由于 $\varphi(s)$关于 s 是整数,$s\in[0,\infty)$时 $F(s)\neq 0$. 因此由(8.2.7)可知(8.2.7)左端可解析延拓到任何 $s\in(0,\infty)$的某一邻域. 但另一方面,有 $t_1>0, M>0$ 使得 $M - \frac{m}{\min\limits_{s\in(0,\infty)} F(s)} > 0$, 则

$$\int_0^\infty e^{-st}\left(y(t) - \frac{m}{F(s)}\right)\mathrm{d}s \geqslant \int_0^{t_1} e^{-st}\left(y(t) - \frac{m}{F(s)}\right)\mathrm{d}s$$

$$+ \int_1^\infty e^{-st}\left(M - \frac{m}{\min\limits_{s\in(0,\infty)} F(s)}\right)\mathrm{d}s \to +\infty, s \to 0^+.$$

这是一个矛盾. 证毕.

类似地有如下结果:

定理 8.2.2　若定理 8.2.1 的条件成立,则(8.2.1)有有界正解当且仅当(8.2.2)有负根.

定理 8.2.3　(8.2.4)成立且 $\tau_1 > \tau_2$,则方程(8.2.1)有无界正解的充要条件是

$$p_1\tau_1 > p_2\tau_2, p_2^{\tau_1}\tau_2^{\tau_2}(\tau_1 - \tau_2)^{\tau_1-\tau_2} \geqslant p_1^{\tau_2}\tau_1^{\tau_1}. \qquad (8.2.8)$$

定理 8.2.4　(8.2.4) 成立且 $\tau_1 > \tau_2$,则 (8.2.1) 有有界正解当且仅当 $p_1\tau_1 < p_2\tau_2, p_2^{\tau_1}\tau_2^{\tau_2} \geqslant p_1^{\tau_2}\tau_1^{\tau_1}$.

我们只给出定理 8.2.3 的证明. 由定理 8.2.1 可知 (8.2.3) 有正根. 因 $F(\infty)=1, F(0)=1+p_1-p_2>0$ 且 $F'(\lambda)=0$ 有唯一解 $\lambda_0 = \frac{1}{\tau_1-\tau_2}\ln\frac{p_1\tau_1}{p_2\tau_2}$,故(8.2.7)有正根等价于(8.2.8)式成立.

§8.3 变系数振动

考虑差分方程

$$y(t)-y(t-\tau)+p(t)y(t-\sigma)=0, \qquad (8.3.1)$$

其中$0<\tau\leqslant\sigma$, $p(t)\in C([0,\infty),\mathbf{R}^+)$.

定理 8.3.1 设$\liminf\limits_{t\to\infty}p(t)=p>0$, $\sigma=k\tau+\theta$. 其中k是正整数. $0\leqslant\theta<\tau$, 且$z_n-z_{n-1}+pz_{n-k}\leqslant0$无最终正解, 则方程(8.3.1)也无最终正解.

证明 设$y(t)$是(8.3.1)的最终正解. 对(8.3.1)两边积分有

$$\int_{t-\tau}^{t}y(s)\mathrm{d}s=\int_{t-\tau}^{t}y(s-\tau)\mathrm{d}s-\int_{t-\tau}^{t}p(s)y(s-\sigma)\mathrm{d}s$$

$$\leqslant\int_{t-\tau}^{t}y(s-\tau)\mathrm{d}s-p\int_{t-\tau}^{t}y(s-\sigma)\mathrm{d}s.$$

令$z(t)=\int_{t-\tau}^{t}y(s)\mathrm{d}s$. 显然$z'(t)=y(t)-y(t-\tau)<0$.

$$\int_{t-\tau}^{t}y(s-\sigma)\mathrm{d}s=z(t-\sigma)=z(t-(k\tau+\theta))\geqslant z(t-k\tau).$$

于是

$$z(t)-z(t-\tau)+pz(t-k\tau)\leqslant0.$$

令$t_n=n\tau$, $z(n\tau+T)=z_n$, 则有

$$z_n-z_{n-1}+pz_{n-k}\leqslant0.$$

证毕.

定理 8.3.2 设$\bar{p}(t)=\min\limits_{t-\tau\leqslant s\leqslant t}p(s)$且

$$x'(t)+\frac{1}{\tau}\bar{p}(t)x(t-\sigma+\tau)=0$$

振动, 则(8.3.1)振动.

证明 设$t\geqslant T$时$y(t)>0$是(8.3.1)的解, 积分(8.3.1)有

$$\int_{t-\tau}^{t}y(s)\mathrm{d}s-\int_{t-\tau}^{t}y(s-\tau)\mathrm{d}s+\int_{t-\tau}^{t}p(s)y(s-\sigma)\mathrm{d}s=0.$$

由积分中值定理可知

$$\int_{t-\tau}^{t} y(s)\mathrm{d}s - \int_{t-\tau}^{t} y(s-\tau)\mathrm{d}s + \bar{p}(t)\int_{t-\tau}^{t} y(s-\sigma)\mathrm{d}s \leqslant 0.$$

令 $z(t)=\int_{t-\tau}^{t} y(s)\mathrm{d}s$,则 $z(t)>0$ 且 $z'(t)<0$.于是有

$$z(t)-z(t-\tau)+\bar{p}(t)z(t-\sigma)\leqslant 0.$$

再令 $u(t)=\int_{t-\tau}^{t} z(s)\mathrm{d}s, u(t)>0, u'(t)\leqslant \tau z(t-\tau)$.于是,$u'(t)+\frac{1}{\tau}\bar{p}u(1-\sigma+\tau)\leqslant 0$.证毕.

§8.4 具有连续变量常系数偏差分方程

本节中将考虑具连续变量的偏差分方程:

$$\alpha u(t+\gamma, s+\bar{w})+\beta u(t+\bar{\gamma}, s)+\gamma u(t, s+\bar{w}) + \delta u(t-\bar{\tau}, s-\bar{\sigma})=0, \tag{8.4.1}$$

其中 $t,s\geqslant 0, \alpha,\beta,\gamma,\delta\in R, \bar{\gamma},\bar{w}>0, \bar{\tau},\bar{\sigma}\geqslant 0$.当 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 取不同的值,我们可得到不同的方程.例如,

$$u(t,s)+cu(t-\tau,s-\sigma)=0. \tag{8.4.2}$$

$$u(t+\gamma,s)+bu(t,s+w)+cu(t-\tau,s-\sigma)=0. \tag{8.4.3}$$

其中 $b\neq 0$,否则两方程一致.

$$u(t+\gamma,s+w)+au(t+\gamma,s)+bu(t,s+w) + cu(t-\tau,s-\sigma)=0, \tag{8.4.4}$$

其中 $|a|+|c|>0, |b|+|c|>0$.方程 (8.4.2),(8.4.3),(8.4.4) 均要求 $\gamma,w>0, \tau,\sigma\geqslant 0$.

方程 (8.4.2),(8.4.3)或 (8.4.4)的一个解是定义在 $t\geqslant -\tau$, $s\geqslant -\sigma$上的二元连续函数 $u(t,s)$且当 $t,s\geqslant 0$ 满足方程.这样的解如果对所有的大 t 和大 s 有 $u(t,s)>0$,我们称其为最终正解.最终负解可类似定义.如果一个解既不是最终正解也不是最终负解,称为

振动解.

方程(8.4.2)的振动性是显然的.确实,$c\geqslant 0$ 方程(8.4.2)不可能有最终正解.如果(8.4.2)有一个最终正解,则

$$c=-\frac{u(t,s)}{u(t-\tau,s-\sigma)}<0.$$

相反,如果 $c<0$,显然由 $\lambda^{\tau}\mu^{\sigma}+c=0$ 可找到正数解(λ_*,μ_*).而 $u(t,s)=\lambda_*^t\mu_*^s$ 是(8.4.2)的解.即(8.4.2)有最终正解的充要条件是 $c<0$.

为了获得(8.4.3)和(8.4.4)的振动性,先看两个引理.

引理 8.4.1 $b\neq 0$,则方程

$$f(\lambda,\mu)=\lambda^{\gamma+\tau}\mu^{\sigma}+b\lambda^{\tau}\mu^{w+\sigma}+c=0$$

无任何正解对(λ,μ)的充要条件是 $b>0,c\geqslant 0$.

证明 如果 $b>c,c\geqslant 0$,则对任何正数 λ 和 μ 有 $f(\lambda,\mu)>0$.

相反,$f(0,0)=c$,$\lim\limits_{\lambda\to\infty}f(\lambda,\mu_0)=\infty$,$\mu_0>0$.因此,当 $c<0$,$f(\lambda,\mu)$有正解对.所以,$c\geqslant 0$.如下分两种情况:

(i) $c=0,b<0$;(ii) $c>0,b<0$.

前一种情况成立时,$(\lambda,\mu)=(1,(-1/b)^{1/w})$是 $f(\lambda,\mu)$的正解对.如果(ii)成立,注意到 $f(1,0)=c$,$\lim\limits_{\mu\to\infty}f(1,\mu)=-\infty$.$f(\lambda,\mu)$有正解对$(1,\mu^*)$.证毕.

引理 8.4.2 假设$|a|+|c|>0$,$|b|+|c|>0$.则 $F(\lambda,\mu)=\lambda^{\tau+\gamma}\mu^{\sigma+\omega}+a\lambda^{\tau+\gamma}+b\lambda^{\tau}\mu^{\sigma+\omega}+c=0$ 无正解对的充要条件是 $a\geqslant 0$,$b\geqslant 0$,$c\geqslant 0$.

证明 $a\geqslant 0,b\geqslant 0,c\geqslant 0$ 时,命题显然成立.相反,先考虑 $c=0$ 的情况.这时分三种情况:

(i) $a>0,b<0$; (ii) $a<0,b>0$; (iii) $a<0,b<0$.

(i) 成立时,$F(\lambda,\mu)$有解对$(-b/(a+1)^{\frac{1}{\gamma}},1)$.(ii)成立时,$(1,-a/(b+1)^{\frac{1}{\omega}})$是 F 的解.(iii)成立时,$F(\lambda,\mu)$有解对

$((-3b)^{\frac{1}{\gamma}},(-3a/2)^{\frac{1}{\omega}})$.

若 $c<0$，$F(\lambda,\mu)$显然有正解对.最后考虑 $c>0$.这时分五种情况：

(i) $a>0,b<0$;　(ii) $a<0,b>0$;　(iii) $a=0,b<0$;

(iv) $a<0,b=0$;　(v) $a<0,b<0$.

当(i)成立时，取 $\lambda_*\in(0,(-b)^{\frac{1}{\gamma}})$.因

$F(\lambda_*,0)=c>0$，$\lim\limits_{\mu\to\infty}F(\lambda_*,\mu)=-\infty$，则有 $\mu_*>0$ 使得 $F(\lambda_*,\mu_*)=0$.(ii)成立时，类似可得.(iii)成立时，有解 $\left(\left(-\frac{b}{2}\right)^{\frac{1}{\gamma}},\left(\frac{-2c}{b}\right)^{\frac{1}{\omega+\sigma}}\left(-\frac{2}{b}\right)^{\frac{\tau}{\gamma(\omega+\sigma)}}\right)$.(iv)成立时，有解 $\left(\left(-\frac{2c}{b}\right)^{\frac{1}{\gamma+\tau}}\left(-\frac{2}{a}\right)^{\frac{\sigma}{\omega(\gamma+\tau)}},\left(-\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{\omega}}\right)$.(v)成立时，$F\left(\left(-\frac{2c}{a}\right)^{\frac{1}{\gamma+\tau}}\left(-\frac{2}{a}\right)^{\frac{\sigma}{\omega(\gamma+\tau)}},\left(-\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{\omega}}\right)<0$，而 $\lim\limits_{\lambda,\mu\to\infty}F(\lambda,\mu)=\infty$.因此 $F(\lambda,\mu)$有正解对.证毕.

定理 8.4.1　如果 $b\neq0$ 则 (8.4.3) 无最终正解的充要条件是 $b>0,c\geqslant0$.

定理 8.4.2　如果 $|a|+|c|>0$，$|b|+|c|>0$，则(8.4.4)无最终正解的充要条件是 $a\geqslant0,b\geqslant0,c\geqslant0$.

定理的证明省略.最后看两个例子.

考虑方程

$$u(t+\pi,s)+\frac{3}{2}u(t,s+\pi)+\frac{5}{2}u(t-\pi,s-\pi)=0,$$

它满足定理 8.4.1 的条件，因此无任何最终正解.它有振动解 $u(t,s)=\sin t\cos s$.

方程

$$u(t+\pi,s)-3u(t,s+\pi)+2u(t-\pi,s)=0$$

不满足定理 8.4.1 的条件，它有非振动解 $u(t,s)=1$，但它也有振动解 $u(t,s)=\sin t\cos s$.

§8.5 具有连续变量变系数偏差分方程

考虑偏差分方程

$$
\begin{aligned}
& y(t,s-\sigma)+y(t-\tau,s)-y(t-\tau,s-\sigma) \\
& +p(t,s)y(t-\mu,s-\eta)=0,
\end{aligned}
\tag{8.5.1}
$$

其中 $0<\tau\leqslant\mu$, $0<\sigma\leqslant\eta$, $p(t,s)$ 是 $t\geqslant0$, $s\geqslant0$ 上的连续函数. 为了获得(8.5.1)的振动结果，我们首先看它的一种特殊情况. 假设 $\tau=\mu$, $\sigma=\eta$, 而函数 $p(t,s)$ 有子列 $\{(p(t_m,s_n))\}$ 使得 $\lim\limits_{m\to\infty}t_m=\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\infty$, $m\geqslant1$, $n\geqslant1$ 时 $p(t_m,s_n)\geqslant1$. 那么，方程(8.5.1)无最终正解. 如果 $y(t,s)$是 (8.5.1) 的最终正解，则

$$
\begin{aligned}
0< & \ y(t_m,s_n-\sigma)+y(t_m-\tau,s_m) \\
& =[1-p(t_m,s_n)]y(t_m-\tau,s_n-\gamma)\leqslant0.
\end{aligned}
$$

这是一个矛盾.

如果 $\mu=m\tau$, $\eta=n\sigma$, $p(t,s)\geqslant0$, $y(t,s)$是 (8.5.1)的最终正解，则由(8.5.1)可知

$$
\begin{aligned}
& y(t,s-\sigma)+y(t-\tau,s)\leqslant y(t-\tau,s-\sigma), \\
& y(t,s-\sigma)\leqslant y(t-\tau,s-\sigma), y(t-\sigma\tau,s).
\end{aligned}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
& y(t,s-\sigma)+y(t-\tau,s) \\
& =(t-\tau,s-\sigma)-p(t,s)y(t-m\tau,s-n\sigma) \\
& \leqslant[1-p(t,s)]y(t-m\tau,s-n\sigma).
\end{aligned}
$$

这样我们会有如下结果：

定理 8.5.1 假设 $\mu=m\tau$, $\eta=n\sigma$, $p(t,s)\geqslant0$, $\lim\limits_{t,s\to\infty}\sup p(t,s)>1$, 则 (8.5.1) 无最终正解.

接下来,我们再来寻找(8.5.1)的更一般结果. 假设 $\mu = m\tau$, $\eta = n\sigma$, $y(t,s)$是 (8.5.1) 的最终正解. 那么, 令 $z_{ij} = y(i\tau + T, j\sigma + S)$,则有

$$z_{i+1,j} + z_{i,j+1} - z_{i,j}$$
$$+ p((i+1) + T, (j+1)\sigma + S) z_{i+1-m,j+1-n} = 0. \quad (8.5.2)$$

定理8.5.2　假设 $\mu = m\tau$, $\eta = n\sigma$ 且 (8.5.2) 无最终正解,则(8.5.1)无最终正解.

例 8.5.1　考虑方程

$$y(t, s-2\pi) + y(t-2\pi, s) - y(t-2\pi, s-2\pi)$$
$$+ (\sin t \sin s) y(t-6\pi, s-8\pi) = 0,$$

它没有最终正解. 这是因为

$$z_{i+1,j} + z_{i,j+1} - z_{ij} + z_{i-2,j-3} = 0$$

无最终正解.

定理 8.5.3　假设$\liminf\limits_{t,s\to\infty} p(t,s) = p > 0$, $m\mu = m\tau + \alpha$, $\eta = n\sigma + \beta$,其中 $0 \leqslant \alpha < \tau$, $0 \leqslant \beta < \sigma$,假设方程

$$z_{i+1,j} + z_{i,j+1} - z_{ij} + p z_{i-m+1,j-n+1} = 0 \quad (8.5.3)$$

无最终正解, 则 (8.5.1) 无最终正解.

证明　设 $y(t,s)$是 (8.5.1)的最终正解,由 (8.5.1),我们有

$$\int_{t-\tau}^{t}\int_{s-\sigma}^{s}[y(u,v-\sigma) + y(u-\tau,v)]\mathrm{d}v\mathrm{d}u$$

$$\int_{t-\tau}^{t}\int_{s-\sigma}^{s}[y(u-\tau,v-\sigma) - p(u,v)y(u-\mu,v-\eta)]\mathrm{d}v\mathrm{d}u$$

$$\leqslant \int_{t-\tau}^{t}\int_{s-\sigma}^{s} y(u-\tau,v-\sigma)\mathrm{d}v\mathrm{d}u$$

$$- p\int_{t-\tau}^{t}\int_{s-\sigma}^{s} y(u-\mu,v-\eta)\mathrm{d}v\mathrm{d}u.$$

令

$$W(t,s) = \int_{t-\tau}^{t}\int_{s-\sigma}^{s} y(u,v)\mathrm{d}v\mathrm{d}u,$$

易见 $W_t(t,s)<0, W_s(t,s)<0$,且

$$W(t,s-\sigma)+W(t-\tau,s)-W(t-\tau,s-\sigma)+pW(t-m\tau,s-n\sigma)$$
$$\leqslant W(t,s-\sigma)+W(t-\tau,s)-W(t-\tau,s-\sigma)$$
$$+pW(t-m\tau-\alpha,s-n\sigma-\beta)\leqslant 0.$$

利用定理 8.5.2 可知

$$z_{i+1,j}+z_{i,j+1}-z_{ij}+pz_{i-m+1,j-n+1}\leqslant 0$$

有一个最终正解,这是一个矛盾. 证毕.

§8.6 注 记

§8.1 引自 Ladas 等[157], §8.2 的内容由周效良在[158]中获得,定理 8.3.1 是张和燕在[160]中的一个定理, 而定理 8.3.2 看申[162], 有关这方面的工作也可参看文献[159]和[161], §8.4 的内容是由 Zhang 等在[165]中得到. §8.5 应看 Zhang [164].

这里是总结了具连续变量差分方程的振动性工作,有关这类方程的其它研究可参看[159]和[156]. 但是, 具连续变量偏差分方程的工作相当少见, 有兴趣的读者可以开辟这方面的研究.

参考文献

[1] C A Swanson, Comparison and Oscillation Theory of Linear Differential Equations, New York and London, Acad. Press, 1968

[2] R G Koplatadze and T A Canturija, On Oscillatory Properties of Differential Equations with Deviating Arguments, Tbilisi Univ. Press, Tbilisi, 1977(Russian)

[3] G S Ladde, V Lakshmikantham and B G Zhang, Oscillation Theory Differential Equations with Deviating Arguments, Marcel Dekker, Inc. New York, 1987

[4] I Gyori and G Ladas, Oscillation Theory of Delay Differential Equations with Applications, Clarendon Press, Oxford, 1991

[5] D D Bainov and D P Mishev, Oscillation Theory for Neutral Differential Equations with Delay, Adam Hilger Bristol, Philadelphia and New York, 1991

[6] 燕居让，常微分方程振动理论，山西教育出版社，1992

[7] L H Erbe, Qingkai Kong and B G Zhang, Oscillation Theory for Functional Differential Equations, Marcel Dekker, Inc. New York, 1995

[8] V Lakshmikantham and D Trigiante, Theory of Difference Equations, Numerical Methods and Applications, Academic Press, INC. 1988

[9] W G Kelley and A C Peterson, Difference Equations, An Introductions with Applications, Academic Press, INC. 1991

[10] V L Kocic and G Ladas, Global Behavior of Nonlinear Difference Equations of Higher Order, Kluwer Academic Publishers, 1993

[11] 王联，王慕秋，常差分方程，新疆大学出版社，

[12] R P Agarwal, Difference Equations and Inequalities: Theory, Methods and Applications, Marcel Dekker Inc., New York, 1992

[13] A J Jerri, Difference Equations with Discrete Transforms Method and Applications, Kluwer Academic Publishers, 1995

[14] L H Erbe and B G Zhang, Oscillation of discrete analogues of delay equations, Differential Integral Equations 2(1989), 300 – 309

[15] G Ladas, Explicit conditions for the oscillation of difference equations, J. Math.

Anal. Appl., 153(1990), 276 – 287

[16] G Ladas, Recent developments in the oscillation of delay difference equations, International Conference on Differential Equations: Theory and Applications in Stability and Control, Colorado Springs, Colorado, June 7 – 10, 1989

[17] G Ladas, Ch..G Philos and Y G Sficas, Necessary and Sufficient conditions for the oscillation of difference equations, Libertas Math., 9(1989), 121 – 125

[18] I Gyori, G Ladas and L Pakula, Conditions for oscillation of difference equations with applications to equations with piecewise constant arguments, SIAM J. Math. Anal., 22(1991), 769 – 773

[19] Ch.G Philos, Oscillations in certain difference equations, Utilitas Math., 39 (1991), 215 – 218

[20] J Jaros and I P Stavroulakis, Necessary and Sufficient conditions for oscillation of difference equations with several delay, Utilitas Math., 45(1994), 187 – 195

[21] E G Partheniadis, Stability and oscillation of neutral delay differential equations with piecewise constant arguments, Differential and Integral Equations 1(1989), 459 – 472

[22] Y Z Lin and S S Cheng, Complete characterizations of a class of oscillatory difference equations, J. Difference Equations and Appl., 2(1996), 301 – 313

[23] V G Boltyanskii, Envelopes, Popular Lectures in Mathematics, vol. 12, Macmilan, New York, 1964

[24] G Zhang and S S Cheng, Elementary oscillation criteria for a three term recurrence relation with oscillatory coefficient sequence, Tamkang J. Math., 29(3)(1998), 227 – 232

[25] G Chuanxi, G Ladas and J Yan, Oscillation of difference equations with oscillations coefficients, Radovi Math., 8(1992), 55 – 65

[26] J S Yu, B G Zhang and X Z Qian, Oscillations of delay difference equations with oscillating coefficients, J. Math. Anal. Appl., 177(1993), 432 – 444

[27] B S Lalli and B G Zhang, Oscillation of difference equations, Colloquium Math., 65(1)(1993), 25 – 32

[28] Y Domshlak, What should be a discrete version of the Chanturia – Koplatadze lemma?, to appear

[29] S S Cheng and G Zhang, "Virus" in several discrete oscillation theorems, Appl. Math. Lett., 13(2000), 9－13

[30] G Ladas, Ch. G Philos and Y G Sficas, Sharp conditions for the oscillation of delay difference equations, J. Applied Math. Simulation 2(1989), 101－119

[31] I P Stavroulakis, Oscillations of delay difference equations, Computers Math. Applic. 29(7)(1995), 83－88

[32] C J Tian, S L Xie and S S Cheng, Measures for oscillatory sequences, Computers Math. Appl., 36(10－12)(1998), 149－161

[33] 唐三一，肖燕妮，陈菊芳，非线性时滞差分方程的线性化振动，数学学报，42(4)(1999)，655－658

[34] J Yan and C Qian, Oscillation and comparison results for delay difference equations, J. Math. Anal. Appl., 165(1992), 346－360

[35] G Ladas and C Qian, Linearized oscillations for nonautonomous delay difference equations, Contemporary Math., 129(1992), 115－125

[36] I Gyori and G Ladas, Linearized oscillations for equations with piecewise constant arguments, Differential Integral Equations, 2(1989), 123－131

[37] Y Li, Linearized oscillation of first order nonlinear delay difference equations, Chinese Science Bulletin, 39(1)(1994), 1159－1163

[38] S S Cheng and G Zhang, Existence criteria for positive solutions of a nonlinear difference equality, Ann. Poland Math., to appear

[39] S S Cheng, G Zhang and S T Liu, Stability of oscillatory solutions of difference equations with delays, Taiwanese J. Math., 3(4)(1999), 503－515

[40] G Ladas, C Qian, P N Alahos and J Yan, Stability of solutions of linear nonautonomous difference equations, Appl. Anal., 41(1991), 183－191

[41] S S Cheng and Y Z Lin, Complete characterizations of an oscillatory neutral difference equation, J. Math. Anal. Appl., 221(1998), 73－91

[42] D A Georgiou, E A Grove and G Ladas, Oscillations of neutral difference equations, Applicable Analysis, 33(1989), 243－253

[43] G Zhang and S S Cheng, Note on a discrete Emden－Fowler equation, PanAmerican Math. J., 9(3)(1999), 57－64

[44] G Zhang and S S Cheng, Oscillation criteria for a neutral difference equation with

delay, Appl. Math. Lett., 8(3)(1995), 13 - 17

[45] G Zhang and S S Cheng, Elementary nonexistence criteria for a recurrence relation, Chinese J. Math., 24(3)(1996), 229 - 235

[46] S S Cheng and G Zhang, Nonexistence criteria for positive solutions of a nonlinear recurrence relation, Mathl. Comput. Modelling, 29(2)(1995), 59 - 66

[47] G Zhang and S S Cheng, Positive solutions of a nonlinear neutral difference equations, Nonlinear Anal. TMA, 28(4)(1997), 729 - 738

[48] G Zhang and S S Cheng, A necessary and sufficient oscillation condition for the discrete Euler equation, PanAmerican Math. J., to appear

[49] M P Chen and B G Zhang, The existence of the bounded positive solutions of delay difference equations, PanAmerian Math. J., 3(1)(1993), 79 - 94

[50] S R Grace and B S Lalli, Oscillation theorems for second order delay and neutral difference equations, Utilitas Math. 45(1994), 199 - 211

[51] M P Chen, B S Lalli, and J S Yu, Oscillation in neutral delay difference equations with variable coefficients, Computer, Math. Applic., 29(1995), 5 - 11

[52] J S Yu, B G Zhang and Z C Wang, Oscillation of delay difference equations, Appl. Anal., 153(1994), 117 - 124

[53] J W Li, Z C Wang and H Q Zhang, Oscillation of neutral delay difference equations, Differential Equations and Dynamical Systems, 4(1)(1996), 113 - 121

[54] B S Lalli, B G Zhang and J Z Li, On the oscillation of solutions and existence of positive solutions of neutral difference equations, J. Math. Anal. Appl., 158(1991), 213 - 233

[55] B S Lalli and B G Zhang, Oscillation and comparison theorems for certain difference equations, J. Austral. Math. Soc. Ser. B34(1992), 245 - 256

[56] B S Lalli and B G Zhang, On existence of positive solutions and bounded oscillations for neutral difference equations, J. Math. Anal. Appl., 166(1992), 272 - 287

[57] M P Chen and B G Zhang, Oscillation and comparison theorems of difference equations with positive and negative coefficients, Bull. Institute Math. Academia Sinica, 22(4)(1994), 295 - 306

[58] B G Zhang and P X Yan, Oscillation and comparison theorems for neutral difference equations, Tamkang J. Math., 25(4)(1994),

[59] Z C Wang and J S Yu, Oscillation and asymptotic behavior of difference equations with positive and negative coefficients, Ann. Diff. Eqns., 8(1992), 88 – 97

[60] E Thandapani, Asymptotic and oscillatory behavior of solutions of nonlinear neutral difference equations, Utilitas Math., 45(1994), 237 – 244

[61] E Thandapani and P Sundram, Oscillation properties of first order nonlinear functional difference equations of neutral type, Indian J. Math., 36(1)(1994), 59 71

[62] B G Zhang and H Wang, The existence of oscillatory and nonoscillatory solutions of neutral difference equations, Chinese J. Math., 24(2)(1996),

[63] 张广，陈慧琴，含最大值中立型差分方程非振动解的渐近性，to appear

[64] B G Zhang and G Zhang, Oscillation of nonlinear difference equations of neutral type, Dynamic Systems and Applications, 7(1998), 85 – 92

[65] E Hille, Nonoscillation theorems, Trans. Amer. Math. Soc., 64(1948), 234 – 252

[66] F V Atkinson, Discrete and Continuous Boundary Problems, Academic Press, New York, 1964

[67] T Fort, Finite Differences and Difference Equations in the Real Domain, Oxford University Press, London, 1948

[68] P Hartman and A Wintner, On linear difference equations of the second order, Amer. J. Math., 72(1950), 124 – 128

[69] A Wouk, Difference equations and J - Matrices, Duke Math. J., 50(1953), 141 159

[70] D B Hinton and R T Lewis, Spectral analysis of second order difference equations, J. Math. Anal. Appl., 63(1978), 421 448

[71] W T Patula, Growth and oscillation properties of second order linear difference equations, SIAM J. Math. Anal., 10(1979), 55 – 61

[72] J W Hooker and W T Patula, Riccati type transformations for second order linear difference equations, 82(1981), 451 – 462

[73] J W Hooker and W T Patula, A second order nonlinear difference equation: Oscillation and asymptotic behavior, J. Math. Anal. Appl., 91(1983), 9 - 29

[74] M K Kwong, J W Hooker and W T Patula, Riccati type transformations for second order linear difference equations, 107(1985), 128 – 196

[75] S S Cheng, Sturmian comparison theorems for three - term recurrence equations, J. Math. Anal. Appl., 111(1985), 465 - 474

[76] S S Cheng, Discrete quadratic Wirtinger's inequalities, Linear Algebra and its Appl., 85(1987), 57 - 73

[77] J W Hooker, M K Kwong and W T Patula, Oscillation second order linear difference equations and Riccati equations, SIAM J. Math. Anal. Appl., 18(1987), 54 - 63

[78] L H Erbe and B G Zhang, Oscillation of second order linear difference equations, Chinese J. Math., 16(4)(1988), 239 - 251

[79] S S Cheng, T C Yan and H J Li, Oscillation criteria for second order difference equation, Funkcialaj Ekvacioj, 34(2)(1991), 223 - 239

[80] B G Zhang, Oscillation and asymptotic behavior of second order difference equations, J. Math. Anal. Appl., 173(1993), 58 - 68

[81] E Thandapani, I Gyori and B S Lalli, An application of discrete inequality to second order nonlinear oscillation, J. Math. Anal. Appl., 186(1994), 200 - 208

[82] B Szmanda, Oscillation theorems for nonlinear second order difference equations, J. Math. Anal. Appl., 79(1981), 90 - 95

[83] B Szmanda, Oscillation criteria for nonlinear second order difference equations, Ann. Polon. Math., 43(1983), 225 - 235

[84] B G Zhang and G D Chen, Oscillation of certain second order nonlinear difference equations, J. Math. Anal. Appl., 199(1996), 827 - 841

[85] E Thandapani, Asymptotic and oscillatory behavior of solutions of nonlinear second order difference equations, Indian J. Pure Appl. Math., 24(6)(1993), 365 - 372

[86] E Thandapani and B S Lalli, Oscillation criteria for a second order damped difference equation, Appl. Math. Lett., 8(1)(1995), 1 - 6

[87] H J Li and S S Cheng, An oscillation theorem for a second order nonlinear difference equation, Utilitas Math., 44(1993), 177 - 181

[88] H J LI and S S Cheng, Asymptotically monotone solutions of a nonlinear difference equation, Tamkang J. Math., 24(3)(1993), 269 - 282

[89] G Zhang, S S Cheng and Y Gao, Classification schemes for positive solutions of a second order nonlinear difference equation, J. Comput. Appl. Math., 101(1999), 39 - 51

[90] B Liu and S S Cheng, Positive solutions of second order nonlinear difference equations, J. Math. Anal. Appl., 204(1996), 482 – 493

[91] S S Cheng and B G Zhang, Nonexistence of positive nondereasing solutions of a nonlinear difference equation, Proceeding of the First International Conference on Difference Equations, Gordon and Breach, 1995

[92] S S Cheng and R F Lu, A generalization of the discrete Hardy's inequality, Tamkang J.Math., 24(1993), 469 – 475

[93] H J Li and C C Yeh, Existence of positive nondereasing solutions of nonlinear differene equations, Nonlinear Anal., 22(10)(1994), 1271 – 1284

[94] H J Li and C C Yeh, Nonoscillation in nonlinear difference equations, Computers Math. Applic., 28(1 – 3)(1994), 203 – 208

[95] S S Cheng and W T Patula, An existence theorem for a nonlinear difference equation, NonlinearAnal., 20(3)(1993), 193 – 203

[96] S S Cheng and B G Zhang, Monotone solutions of a class of nonlinear difference equations, Computers Math. Applic., 28(1 – 3)(1994), 71 – 79

[97] P J Y Wong and R P Agarwal, Oscillation theorems for certain second order nonlinear difference equations, J. Math. Anal. Appl., 204(1996), 813 – 829

[98] P J Y Wong and R P Agarwal, Oscillation and monotone solutions of second order quasilinear difference equations, Funkcialaj Ekvacioj, 39(3)(1996), 491 – 517

[99] E Thandapani, M M S Manuel and R P Agarwal, Oscillation and nonoscillation theorems for second order quasilinear difference equations, FACTA Universitatis Ser. Math. Inform., 11(1996), 49 – 65

[100] W T Li and S S Cheng, Oscillation criteria for a nonlinear difference equation, Computers Math. Applic., 36(8)(1998), 87 – 94

[101] S L Xie, G Zhang and S S Cheng, Positive solutions of second order difference inequalities, Differential Equations and Dynamical Systems, 5(1)(1997), 1 – 11

[102] S R Grace and B S Lalli, Oscillation theorems for second order delay and neutral difference equations, Utilitas Math., 45(1994), 197 – 211

[103] E Thandapani, P Sundaram, J R Grace and P W Spikes, Asymptotic properties of solutions of nonlinear second order neutral delay difference equations, Dynamic Systems and Appl., 4(1995), 125 – 136

[104] 高英,高丽云,二阶中立型差分方程解的振动性(I),雁北师院学报,13(5)(1997) 7－10

[105] 高英,二阶中立型差分方程解的振动性(II),雁北师院学报,14(2)(1998) 1－4

[106] B G Zhang and S S Cheng, Oscillation criteria and comparison theorems for delay difference equations, Fasciculi Math., (25(1995), 13－32

[107] B S Lalli and B G Zhang, On existence of positive solutions and bounded oscillations for neutral difference equations, J. Math. Anal. Appl., 166(1)(1992), 272－287

[108] W T Li and S S Cheng, Classifications and existence of positive solutions of second order nonlinear neutral difference equations, Funkcialaj Ekvaioj, 40(3)(1997), 371－393

[109] 高英,张广,二阶中立型差分方程非振动解的渐近性,全国第二届青年常微分方程理论与应用学术会议,(1998) 21－25

[110] G Zhang and S S Cheng, Asymptotic dichotomy for nonoscillatory solutions of a nonlinear difference equation, Applications Mathematicae, 25(4)(1999), 393－399

[111] S S Cheng, On a class of fourth order linear recurrence equations, Internat. J. Math. & Math. Sci., 7(1)(1984), 131－149

[112] J W Hooker and W T Patula, Growth and oscillation properties of solutions of a fourth order linear difference equation, J. Austral. Math. Soc. Ser., 26B(1985), 310－328

[113] W E Taylor. JR, Oscillation properties of fourth order difference equations, Portugaliae Math., 45(1988), 105－114

[114] B Smith and W E Taylor. JR, Oscillatory and asymptotic behavior of certain fourth order difference equations, Rocky Mountain J. Math., 16(2)(1986), 403－406

[115] B Smith and W E Taylor. JR, Oscillation and nonoscillation theorems for some mixed difference equations, Internat. J. Math. & Math. Sci., 15(3)(1992), 537－542

[116] B G Zhang and S S Cheng, On a class of nonlinear difference equations, J. Difference Equations and Appl., 1(1995), 391－411

[117] S S Cheng, Oscillation theorems for linear fourth order differential and difference equations, Proceedings of the International Conference on Functional Differential Equations, Publishing House of Electronic Industry, Guangzhou, China, 1993, 37 - 46

[118] P J Y Wong and R P Agarwal, Comparison theorems for the oscillation of higher order difference equations with deviating arguments, Mathl. Comput. Modelling, 24 (12)(1996), 39 - 48

[119] E Thandapani and B S Lalli, Asymptotic behavior and oscillation of difference equations of volterra type, Appl. Math. Lett., 7(1)(1994), 89 - 93

[120] X L Zhou and S S Cheng, Monotone solutions of a higher order nonlinear difference equation, Far East J. Math., 4(1996), 275 - 295

[121] B Liu and S S Cheng, Monotone solutions of a higher order nonlinear difference equation with advancement, Communications in Applied Analysis, 3(2)(1999), 373 - 381

[122] X L Zhou and J R Yan, Oscillatory properties of higher order nonlinear difference equations, Comput. Math. Appl., 31(1996), 61 - 68

[123] A Zafer and R Dahiya, Oscillation of a neutral difference equation, Appl. Math. Lett., 6(1993), 71 - 74

[124] S S Cheng, G Zhang and W T Li, On a higher order neutral difference equation, Recent Trends in Math. Anal. Appl., to appear

[125] 张广，高英，高阶非线性差分方程的正解，系统科学与数学，19(2)(1999)，157 - 161

[126] 张炳根，杨博，非线性高阶差分方程的振动性，数学年刊，21A(1)(1999)，71 - 80

[127] W T Li, S S Cheng and G Zhang, A classification scheme for nonoscillatory solutions of a higher order nonlinear difference equation, J. Austral. Math. Soc. 67A(1999), 122 - 142

[128] S S Cheng, Partial Difference Equations, to appear

[129] S S Cheng, Maximum principles for solutions of second order partial difference inequalities, Symposium on Functional Analysis and Applications, 395 - 401

[130] S S Cheng, Discrete quadratic Wirtinger's inequalities, Linear Algebra and its

Appl.,85(1987), 57 – 73

[131] S S Cheng, An oscillation criterion for a discrete elliptic equation, Annals Diff. Eq., 11(1995), 10 – 13

[132] S S Cheng, Sturmian theorems for hyperbolic type partial difference equations, J. Difference Eq. Appl., 2(1996), 375 – 387

[133] S S Cheng, L Y Hsieh and Z T Chao, Discrete Lyapunov inequality conditions for partial difference equations, Hokkaidoath J., 19(1990), 229 – 239

[134] S S Cheng and R F Lu, Discrete Wirtinger's inequalities and conditions for partial difference equations, Fasciculi Math., 23(1991), 9 – 24

[135] S S Cheng and B G Zhang, Qualitative theory of partial difference equations (I): Oscillation of nonlinear partial difference equations, Tamkang J. Math., 25 (1994), 279 – 288

[136] S S Cheng, S L Xie and B G Zhang, Qualitative theory of partial difference equations (II): Oscillation criteria for direct control systems in several variables, Tamkang J. Math., 26(1995), 65 – 79

[137] S S Cheng, S L Xie and B G Zhang, Qualitative theory of partial difference equations (III): Forced oscillations of parabolic type partial difference equations, Tamkang J. Math., 26(1995), 177 – 192

[138] S S Cheng, B G Zhang and S L Xie, Qualitative theory of partial difference equations (IV): Forced oscillations of hyperbolic type nonlinear partial difference equations, Tamkang J. Math., 26(1995), 337 – 360

[139] S S Cheng, B G Zhang and S L Xie, Qualitative theory of partial difference equations (V): Sturmian theorems for a class of partial difference equations, Tamkang J. Math., 27(1996), 89 – 97

[140] Cheng. Lin and Zhang, Traveling waves of a discrete conservation law, Appl. Math. Letl. to appear

[141] Cheng, R Medina, Bounded and positive solutions of discrete steady equations, Tamkang J. Math

[142] S S Cheng and B G Zhang, Nonexistence criteria for positive solutions of a discrete elliptic equation, Fasiculi Math., 228(1998), 19 – 30

[143] S S Cheng, S T Liu and G Zhang, A multivariate oscillation theorem, Fasiculi

Math., 30(1999), 15 − 22

[144] Y Domshlak and S S Cheng, Sturmian theorems for a partial difference equations. Functional Differential Eq., 3(1996), 83 − 97

[145] Y Z Lin and S S Cheng, Necessary and sufficient conditions for oscillations of linear partial difference equations with constant coeficients, PanAmerican Math. J., 6(1996), 61 − 67

[146] B Liu, A M Zhao and J R Yan, Necessary and sufficient conditions for oscillations of delay partial difference equations, Collect. Math., 48(3)(1997), 339 − 346

[147] S T Liu and S S Cheng, Existence of positive solutions of a partial difference equation, Tamkang J. Math., 27(1997), 51 − 58

[148] S T Liu and S S Cheng, Nonexistence of positive solutions of a nonlinear partial difference equation, Far East J. Math. Sci., 5(1997), 387 − 403

[149] S T Liu and H Wang, Necessary and sufficient conditions for oscillations of a class of delay partial difference equations, Dynamic Sys. Appl., 7(1998), 495 − 500

[150] S S Cheng, S T Liu and B G Zhang, Positive flows of an infinite network, Comm. Appl. Anal., 1(1997), 83 − 90

[151] C J Tian and B G Zhang, Frequent oscillation of a class of partial difference equations. J. Anal. Appl., 18(1)(1999), 111 − 130

[152] B G Zhang and S T Liu, Oscillation of partial difference equations, PanAmerican Math. J., 5(1995), 61 − 70

[153] B G Zhang and S T Liu, Necessary and sufficient conditions for oscillations of delay partial difference equations, Discussions Mathematicae − Differential Inclusions, 15 (1995), 213 − 219

[154] B G Zhang, S S Cheng and S T Liu, Oscillation of a class of delay partial difference equations, J. Difference Eq. Appl., 1(1995), 215 − 226

[155] W R Melvin, Stability properties of functional difference equations, J. Math. Anal. Appl., 48(1974), 749 − 763

[156] L A V Carvalho, An analysis of the characteristic equation of the scalar linear difference equation with two delay, Lect. Notes in Math., 799(1979), 68 − 81

[157] G Ladas, L Pakula and Z Wang, Necessary and sufficient conditions for oscillation of difference equations, PanAmerican Math. J., 2(1)(1992), 17 − 26

[158] 周效良，差分方程非振动的充要条件，山西大学学报，15(2)(1992)，131 − 134

[159] 张玉珠，王光，关于非线性差分方程的渐近性与振动性，山西大学学报，1(2)(1993)，141 − 144

[160] 张玉珠，燕居让，具连续变量的差分方程的判据，数学学报，38(3)(1995)406 − 411

[161] 周勇，具连续变量的变系数差分方程的振动性，经济数学，13(1)(1996)，86 − 89

[162] 申建华，具连续变量的差分方程振动性的比较定理及应用，科学通报，41(16)，(1996)，1441 − 1444

[163] 董雨滋，张玉珠，燕居让，具连续变量的差分方程振动性的比较定理及强迫振动，系统科学与数学，19(4)(1999)，426 − 433

[164] G Zhang, Nonexistence of positive solutions of a partial difference equation with continuous arguments, Far East J. Math. Sci., 6(1)(1998), 89 − 92

[165] G Zhang, W T Li and S S Cheng, Necessary and sufficient conditions for oscillations of delay partial difference equations with continuous arguments, Far East J. Math. Sci., 1(4)(1999), 501 − 506

[166] J K Hale and S M V Lunel, Introduction to Functional Differential Equations, New York, 1993